
Počítačová grafika III – Všehochut'

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

“Science, it works ...

(bitches!)”

Quote from Richard Dawkins

<http://www.youtube.com/watch?v=n6hx01sC-dU>

... and so does path tracing!



Jerome White

Path Tracing funguje!



Martin Geupel (DeadClown)
raccoon-artworks.de

Path Tracing funguje!



Chakib Rabia Chakib Rabia®
2012



F509682A

Light transport – Global illumination

Archviz



Movies



Image courtesy of Columbia Pictures.
© 2006 Columbia Pictures Industries, Inc.

Light transport – Global illumination

Movies

- **2002, Shrek 2**
(PDI/Dreamworks)
 - 1 bounce indirect

- **2006, Monster House**
(Sony Imageworks)
 - **Full light transport**
(path traced)
 - Arnold renderer



Image courtesy of Columbia Pictures.
© 2006 Columbia Pictures Industries, Inc.

Light transport – Global illumination

Movies

- **2006, Monster House** (Sony Imageworks)
 - ❑ **Full light transport** (path traced)
 - ❑ **Arnold renderer**



Image courtesy of Columbia Pictures.
© 2006 Columbia Pictures Industries, Inc.

- **Full light transport simulation**
 - ❑ Accuracy
 - ❑ Ease of use
 - ❑ **Visual consistency**

Light transport – Global illumination

- **More information**

- “The State of Rendering”



- **Full light transport simulation**

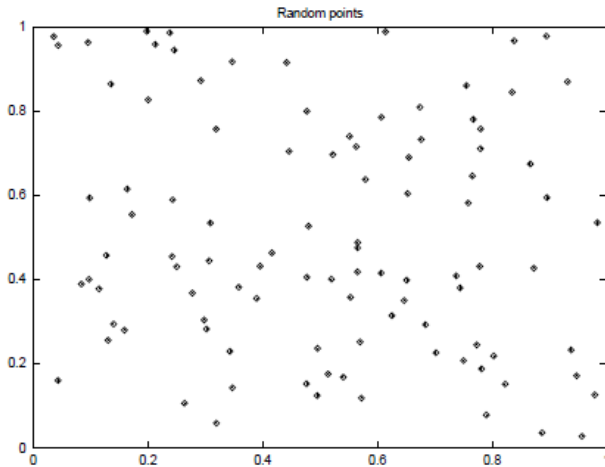
- Accuracy
- Ease of use
- **Visual consistency**

Quasi Monte Carlo Metody

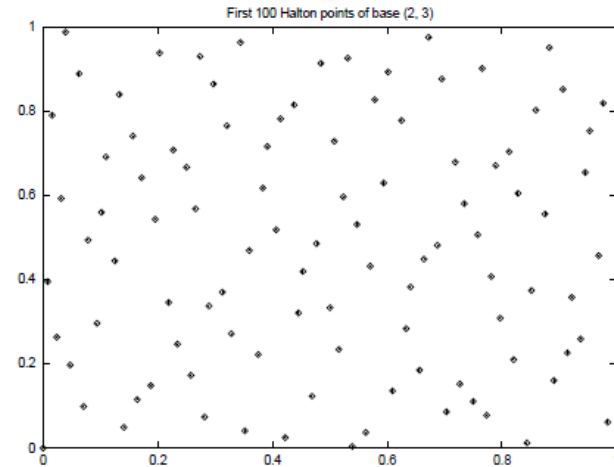
Metody Quasi Monte Carlo (QMC)

- Použití striktně deterministických sekvencí místo náhodných čísel
- Vše funguje jako v MC, důkazy se ale nemohou opírat o teorii pravděpodobnosti (nic není náhodné)
- Použité sekvence čísel s nízkou dikrepancí (**low-discrepancy sequences**)

Diskrepance



High Discrepancy
(clusters of points)



Low Discrepancy
(more uniform)

Defining discrepancy

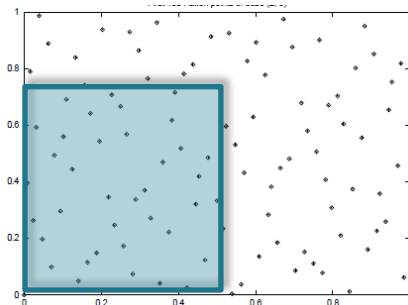
- s -dimensional “brick” function:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \mathbf{z}|_1 \leq v_1, 0 \leq \mathbf{z}|_2 \leq v_2, \dots, 0 \leq \mathbf{z}|_s \leq v_s \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- True volume of the “brick” function:

$$V(A) = \prod_{j=1}^s v_j$$

- MC estimate of the volume of the “brick”:



$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{z}_i) = \frac{m(A)}{N}$$

total number of sample points

number of sample points that actually fell inside the “brick”

Discrepancy

- Discrepancy (of a point sequence) is the maximum possible error of the MC quadrature of the “brick” function over all possible brick shapes:

$$\mathcal{D}^*(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) = \sup_A \left| \frac{m(A)}{N} - V(A) \right|$$

- serves as a measure of the uniformity of a point set
- must converge to zero as $N \rightarrow \infty$
- the lower the better (cf. **Koksma-Hlawka Inequality**)

Koksma-Hlawka inequality

- Koksma-Hlawka inequality

„variation“ of f

$$\left| \int_{\mathbf{z} \in [0,1]^s} f(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{z}_i) \right| \leq \mathcal{V}_{\text{HK}} \cdot \mathcal{D}^*(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$$

- ❑ the KH inequality only applies to f with finite variation
- ❑ QMC can still be applied even if the variation of f is infinite

Van der Corput Sequence (base 2)

i	binary form of i	radical inverse	H_i
1	1	0.1	0.5
2	10	0.01	0.25
3	11	0.11	0.75
4	100	0.001	0.125
5	101	0.101	0.625
6	110	0.011	0.375
7	111	0.111	0.875

- point placed in the middle of the interval
- then the interval is divided in half
- has low-discrepancy

Van der Corput Sequence

- **b ... base**, must be relative prime (2,3,5,7,....)
- radical inverse

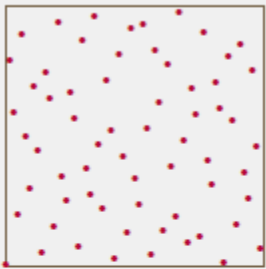
$$\begin{aligned} \Phi_b : \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1) \\ i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i) b^j &\mapsto \Phi_b(i) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i) b^{-j-1} \end{aligned}$$

Van der Corput Sequence (base b)

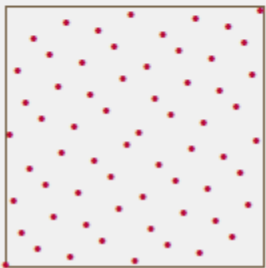
```
double RadicalInverse(const int Base, int i)
{
    double Digit, Radical, Inverse;
    Digit = Radical = 1.0 / (double) Base;
    Inverse = 0.0;
    while(i)
    {
        Inverse += Digit * (double) (i % Base);
        Digit *= Radical;
        i /= Base;
    }
    return Inverse;
}
```

Radical inversion based points in higher dimension

Halton sequence $x_i := (\Phi_{b_1}(i), \dots, \Phi_{b_s}(i))$ where b_i is the i -th prime number



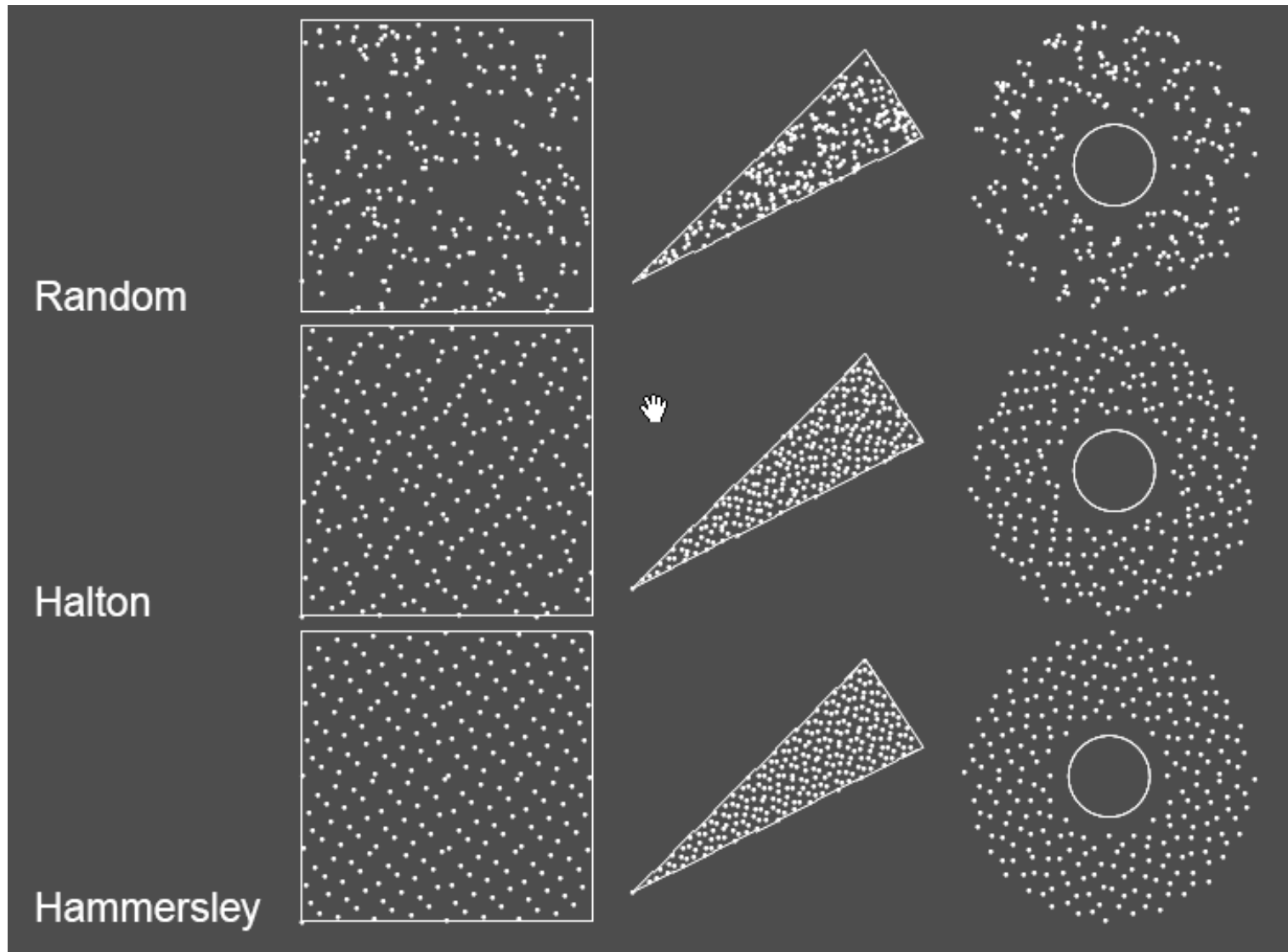
Hammersley point set $x_i := \left(\frac{i}{n}, \Phi_{b_1}(i), \dots, \Phi_{b_{s-1}}(i) \right)$



Použité pro path tracing

- Cesty jsou body ve vysokodimenzionálním prostoru
- Veškerá náhodná čísla použitá pro konstrukci jedné cesty jsou různé komponenty jednoho dlouhého „náhodného vektoru“
- Další cesta – další náhodný vektor ve vysokodimenzionálním prostoru.
- Pokud náhodné vektory dobře pokrývají vysokodimenzionální prostor, pak cesty dobře pokrývají celý prostor cest ve scéně

Transformace náhodných čísel



Ukázka výsledků pro MC a QMC

Monte Carlo
(230s)



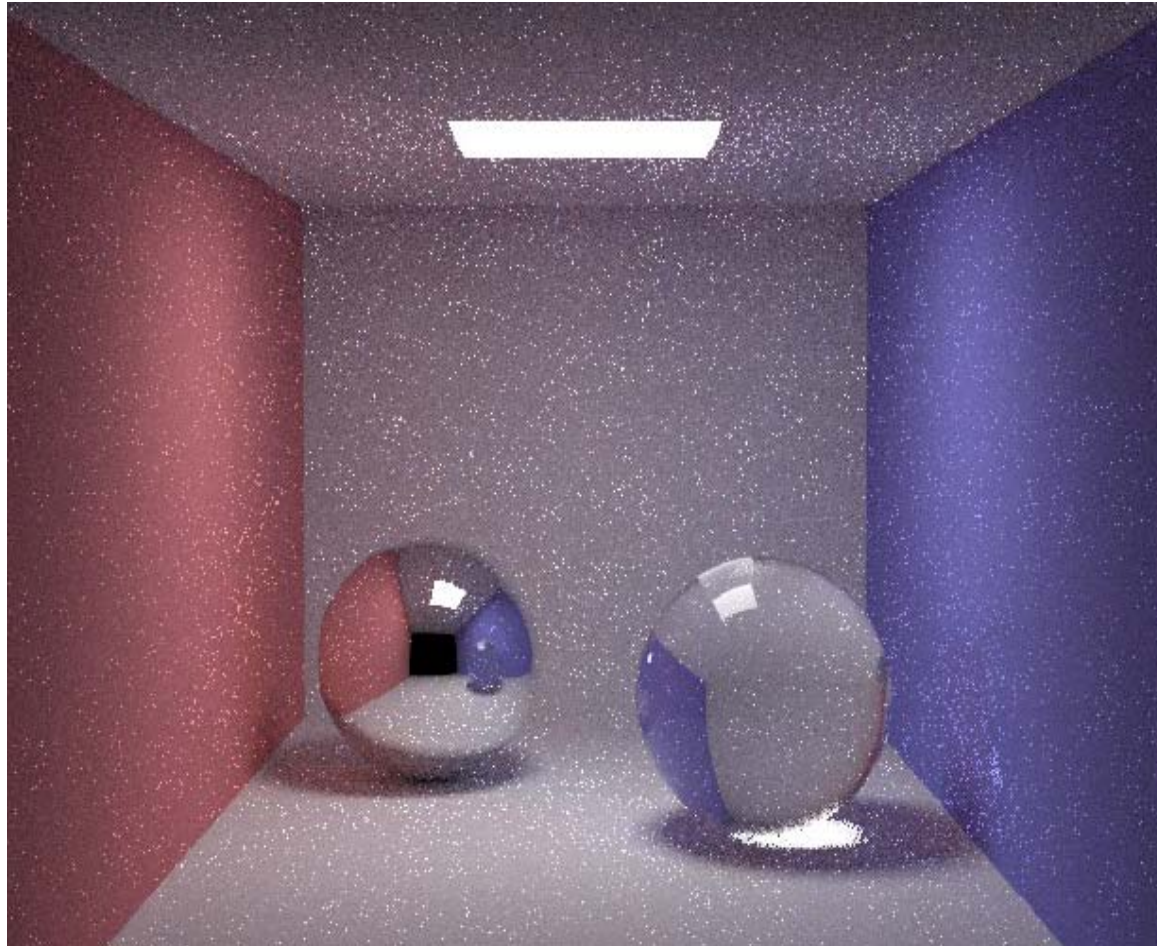
padded
Hammersley
(202s)



Metody Quasi Monte Carlo (QMC)

- Nevýhody QMC:
 - V obrázku mohou vzniknout viditelné „vzory“ (místo šumu v MC)

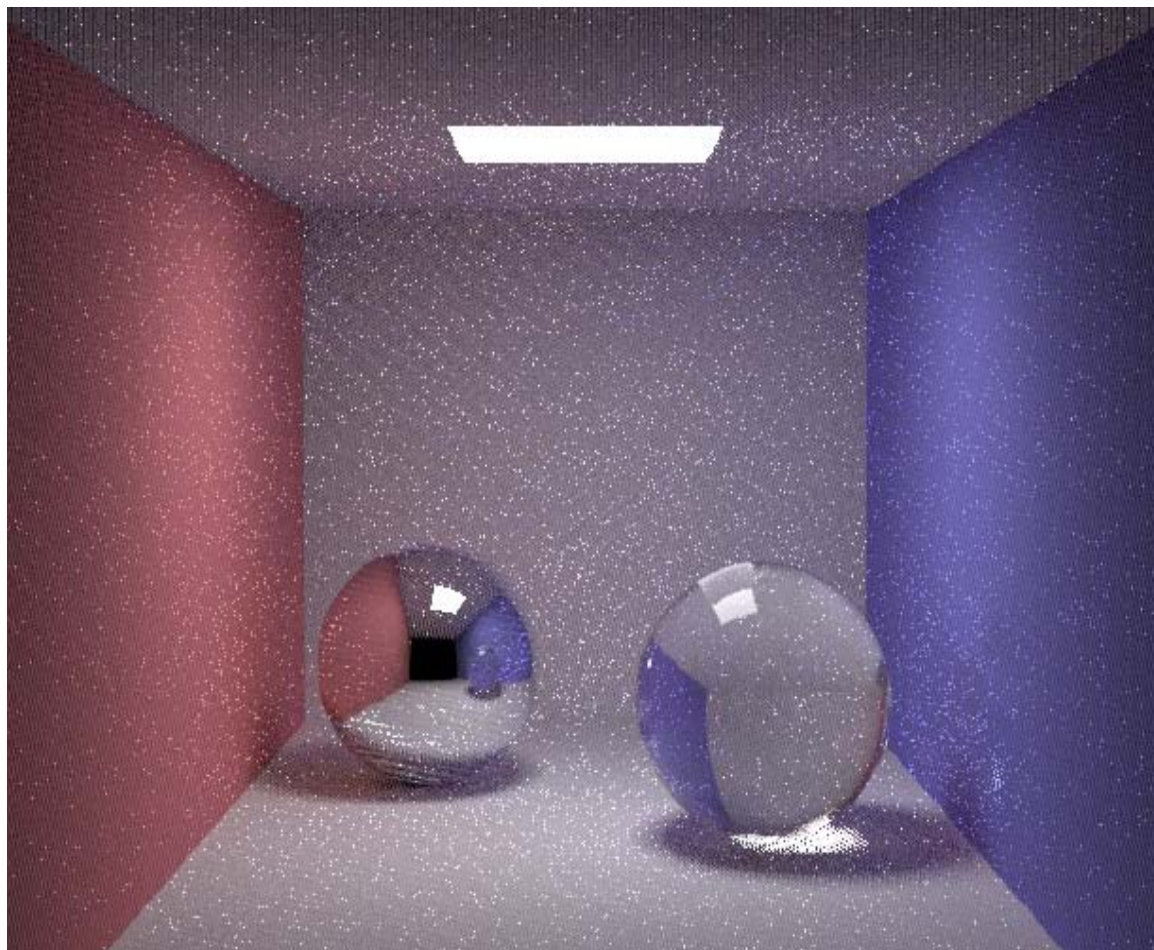
Stratified sampling



Henrik Wann Jensen

10 cest na pixel

Quasi-Monte Carlo



10 cest na pixel

Henrik Wann Jensen

Fixní náhodná sekvence



Henrik Wann Jensen

10 cest na pixel

Měřicí rovnice

Měřicí rovnice

- **Zobrazovací rovnice**
 - Podmínky pro radianci v rovnovážném stavu
 - Umožňuje výpočet radiance v izolovaných bodech
- Ve skutečnosti nás zajímá průměrná radiance přes pixel:
integrál
- **Měřicí rovnice (Measurement equation)**

Měřicí rovnice

odezva virtuálního (lineárního) senzoru na radianci (**barva pixelu**)

relativní odezva senzoru (váha) různé W_e pro každý senzor (pixel)

$$I = \int_{M H(\mathbf{x})} \int W_e(\mathbf{x}, \omega) \cdot L_i(\mathbf{x}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA$$

přes celou plochu scény a všechny směry
(virtuální senzory musí být součástí scény,
nenulový příspěvek pouze na ploše senzoru kvůli W_e)

Příklad: Zářivý tok přes oblast jako měřicí rovnice

- Dána oblast S

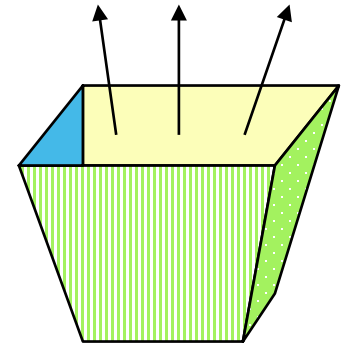
$$S \subset M \times H$$

(podmnožina povrchu scény a příslušných směrů)

- Pro W_e definované

$$W_e(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, \omega) \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je výsledkem měřicí rovnice **zářivý tok** $\Phi(\mathbf{S})$.



Měřicí rovnice jako skalární součin funkcí

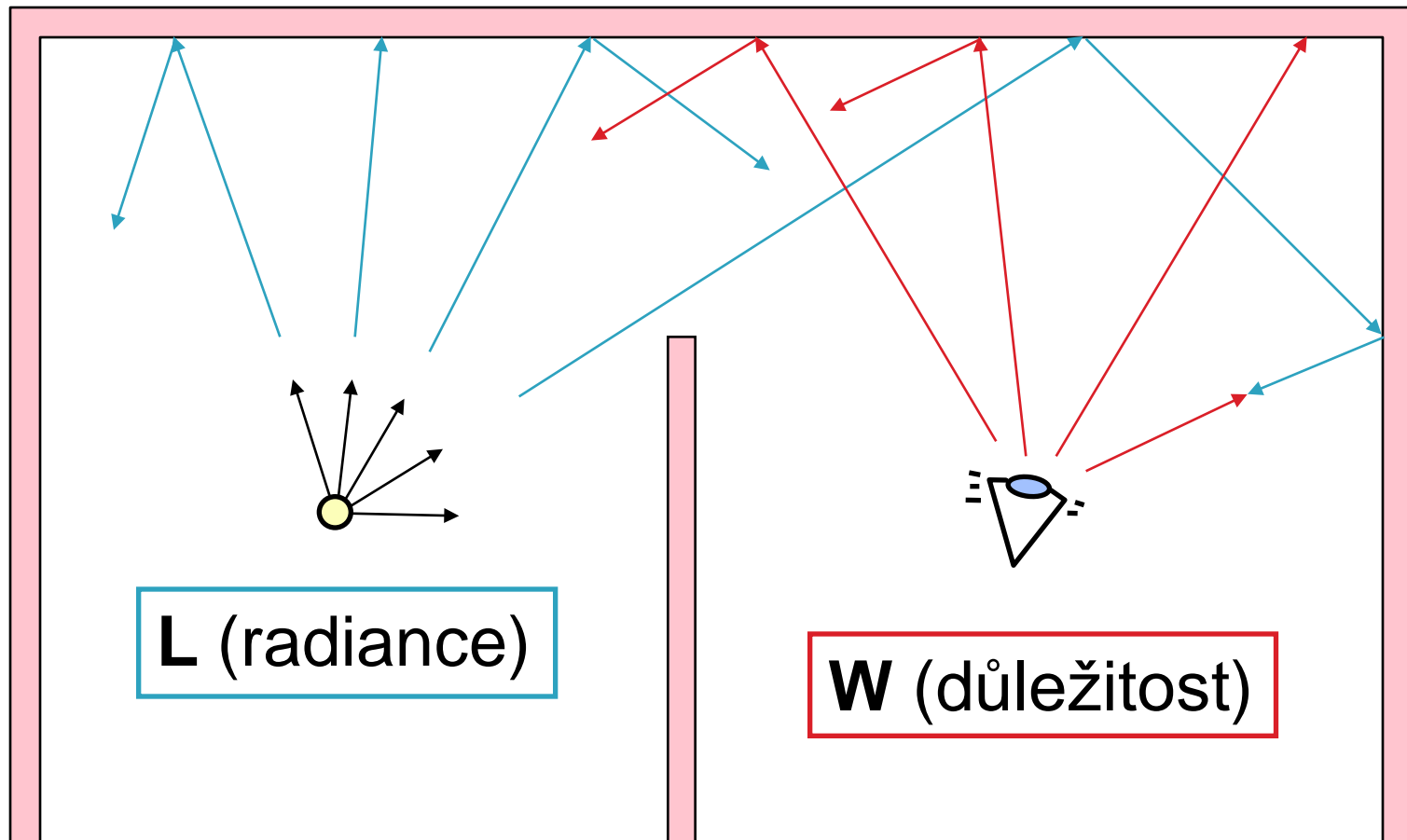
- Definujeme **skalární součin funkcí f a g** :

$$\langle f, g \rangle = \int_{M} \int_{H(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \omega) \cdot g(\mathbf{x}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA$$

- **Měřicí rovnice**

$$I = \langle W_e, L_i \rangle$$

Propagace radiance a důležitosti



Důležitost (importance)

- W_e popisuje, jak důležitá je příchozí radiance pro odezvu senzoru
- 1 krok do scény: Příchozí radiance na senzoru = odchozí radiance z bodů scény
- 2, 3, ... kroky do scény: ...
- W_e interpretujeme jako veličinu emitovanou ze sensorů (stejně jako je radiance L_e emitovaná ze zdrojů světla)
- Takto interpretovanou veličinu W_e nazýváme **emitovanou funkcí důležitosti** (emitted importance function, emitted potential function)

Přenos důležitosti

- Funkce důležitosti se přenáší podobně jako radiance a dosahuje **ustáleného stavu** popsaného **ustálenou funkcí důležitosti W** :

$$W(\mathbf{x}, \omega_o) = W_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} W(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot \underbrace{f_r(\mathbf{x}, \omega_o \rightarrow \omega_i)} \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

Jako zobrazovací rovnice, s tím rozdílem, že argumenty BRDF jsou přehozeny (pro odraz identické, nikoli však pro lom)

Dualita důležitosti a radiance

**emitovaná
importance**

**ustálená
příchozí
radiance**

$$I = \langle W_e, L_i \rangle$$
$$= \langle W_i, L_e \rangle$$

**ustálená
příchozí
importance**

**emitovaná
radiance**

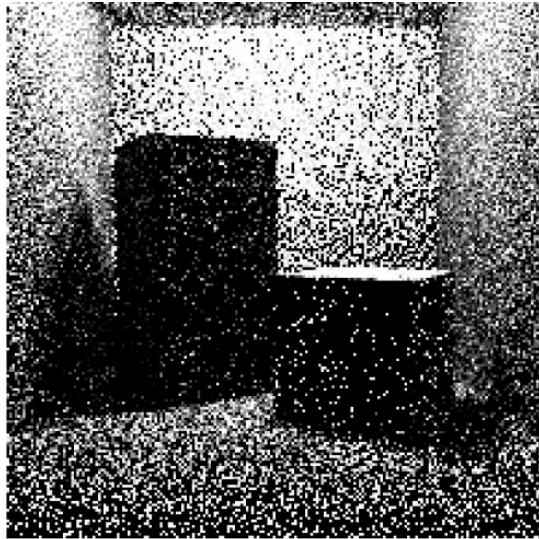
Dualita důležitosti a radiance

- V dané scéně je pouze jediná emitovaná a ustálená funkce radiance
- Ale **každý pixel má jinou emitovanou a ustálenou funkci důležitosti**

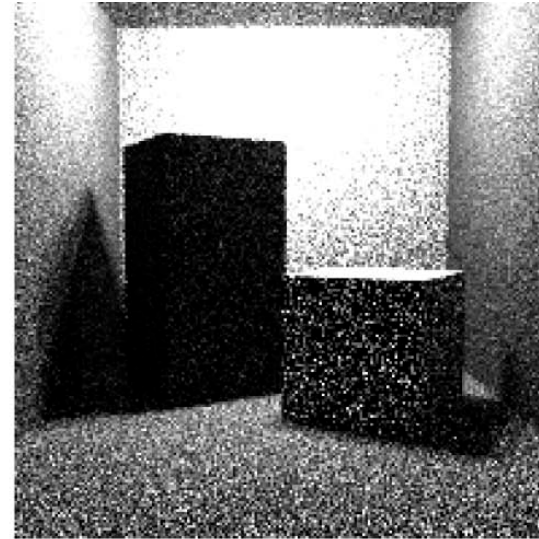
Dualita v praxi: Sledování světla

- Sledování cest (path tracing)
 - Rekurzivně řeší zobrazovací rovnici
- **Sledování světla (light tracing)**
 - Rekurzivně řeší rovnici přenosu důležitosti
 - Cesty začínají na zdrojích světla
 - Mohou náhodně zasáhnout senzor
 - Nebo explicitní napojení na senzor (jako přímé osvětlení v PT)
 - **Pozor:** argumenty BRDF musí být obráceny (cestu sledujeme z druhé strany, BRDF je pořád stejně oprientovaná)

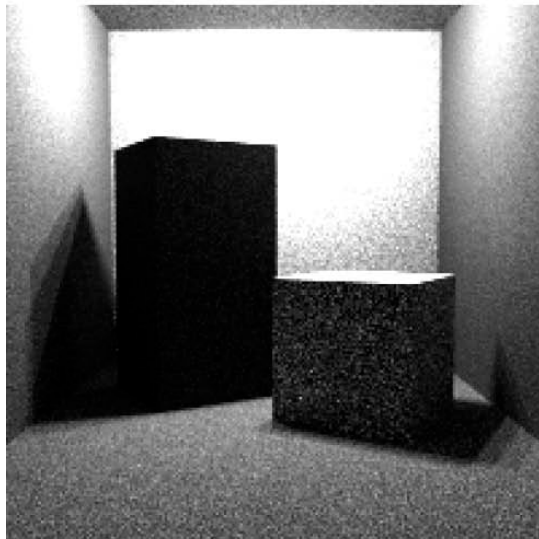
Sledování světla (light tracing) v praxi



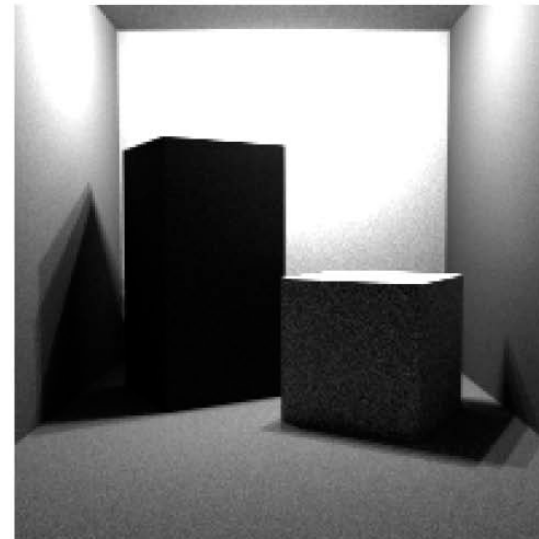
100,000 light rays



1,000,000 light rays



10,000,000 light rays

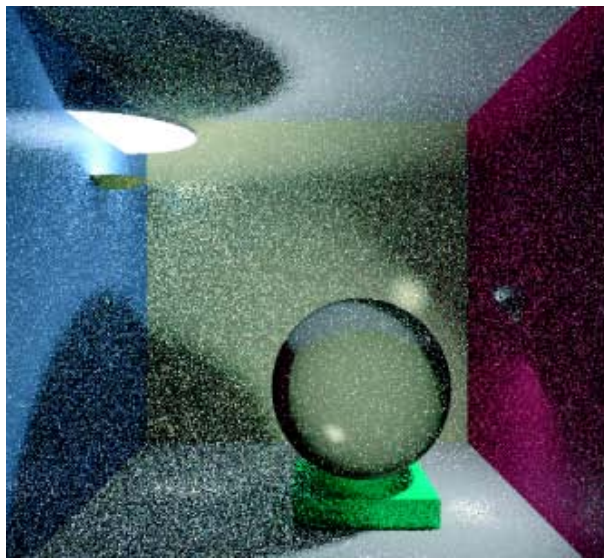


100,000,000 light rays

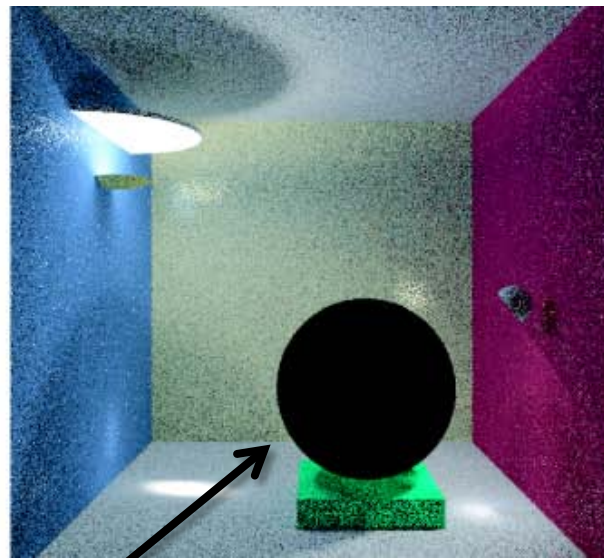
Sledování světla (light tracing) v praxi

- Obvykle menší účinnost než PT
 - (ale např. v opt. akt. médiu blízko světla mnohem lepší)
- Mnohem účinnější pro některé světelné efekty (kaustiky)
- Základ obousměrných metod:
 - Obousměrné sledování cest (bidirectional path tracing, BPT)
 - photon mapping, etc.

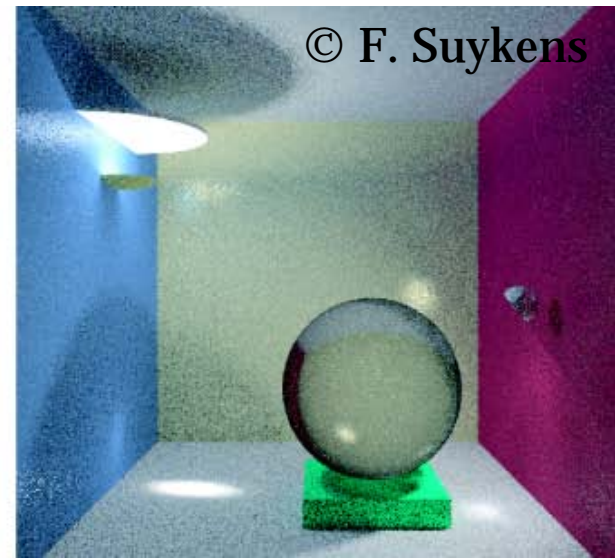
Porovnání algoritmů



Path tracing



Light tracing



Bidirectional path tracing

Kvíz: Proč je skleněná koule černá?

Pokročilé metody simulace transportu světla

Issues in light transport simulation

■ Robustness

- None of the existing algorithms works for all scenes

- Robust estimation

“An estimation technique which is insensitive to small departures from the idealized assumptions which have been used to optimize the algorithm.”

Wolfram MathWorld™
the web's most extensive mathematics resource

Obousměrné sledování cest (BPT) vs. (Jednosměrné) sledování cest (PT)



BPT, 25 vzorků (cest) na pixel



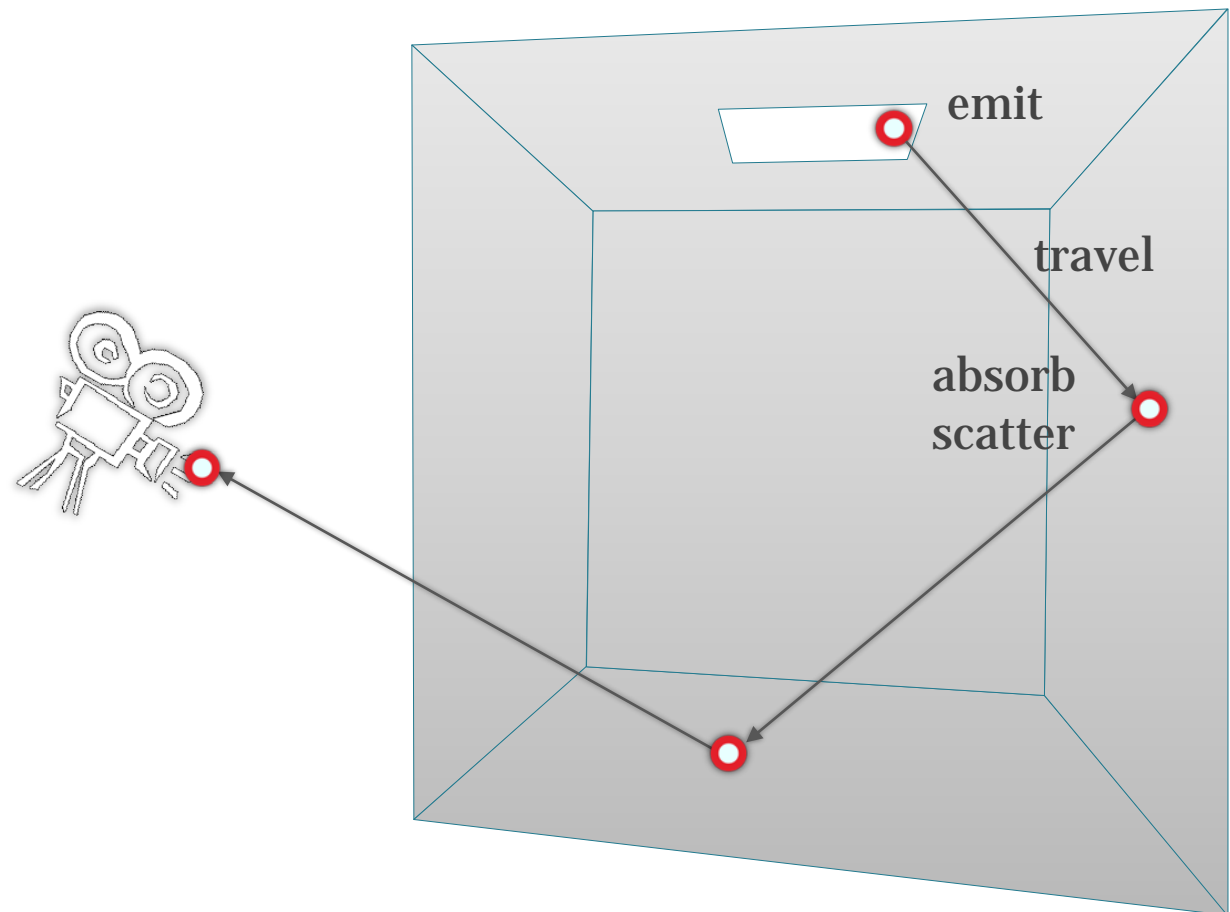
PT, 56 vzorků (cest) na pixel

Image: Eric Veach

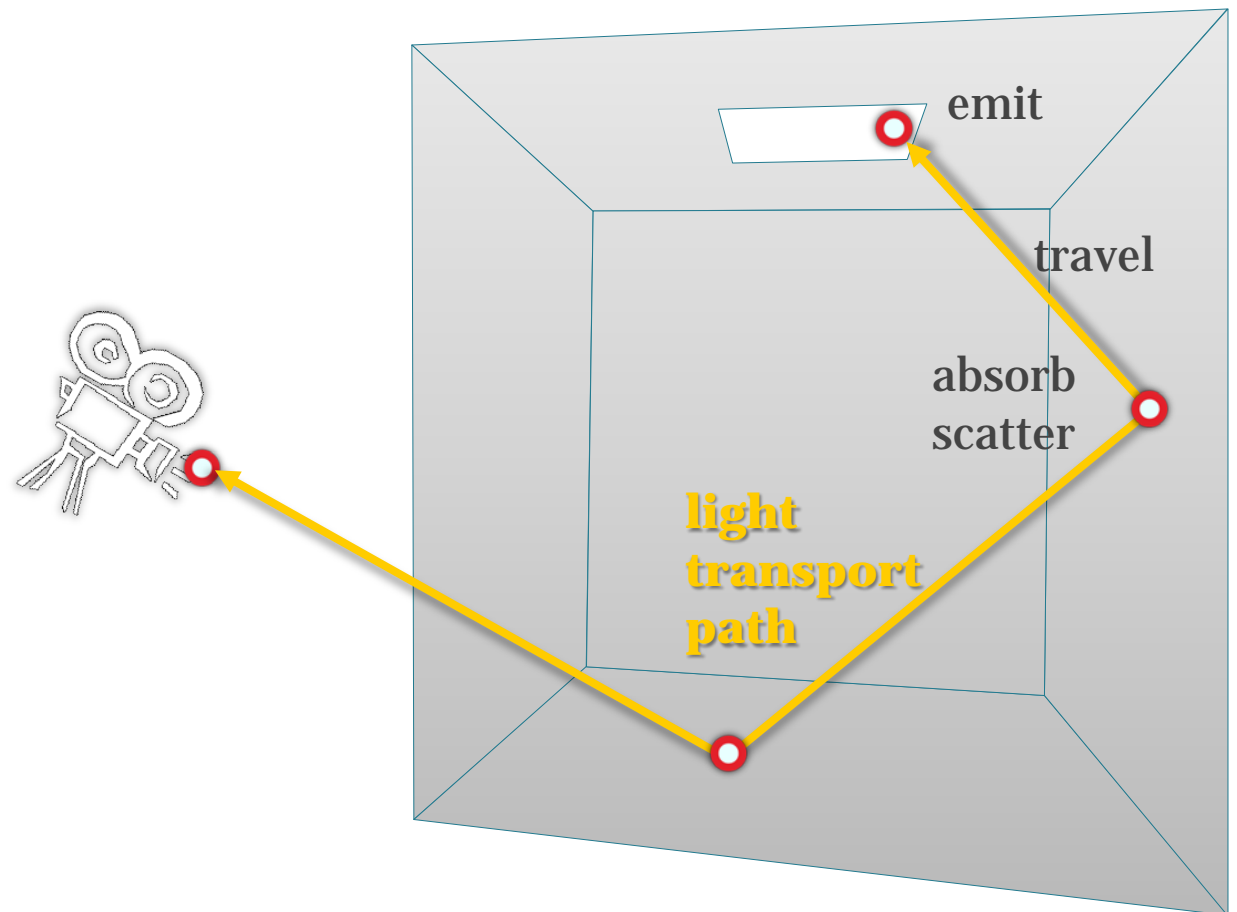
Přenos světla jako integrál přes prostor cest

Light transport

- Geometric optics

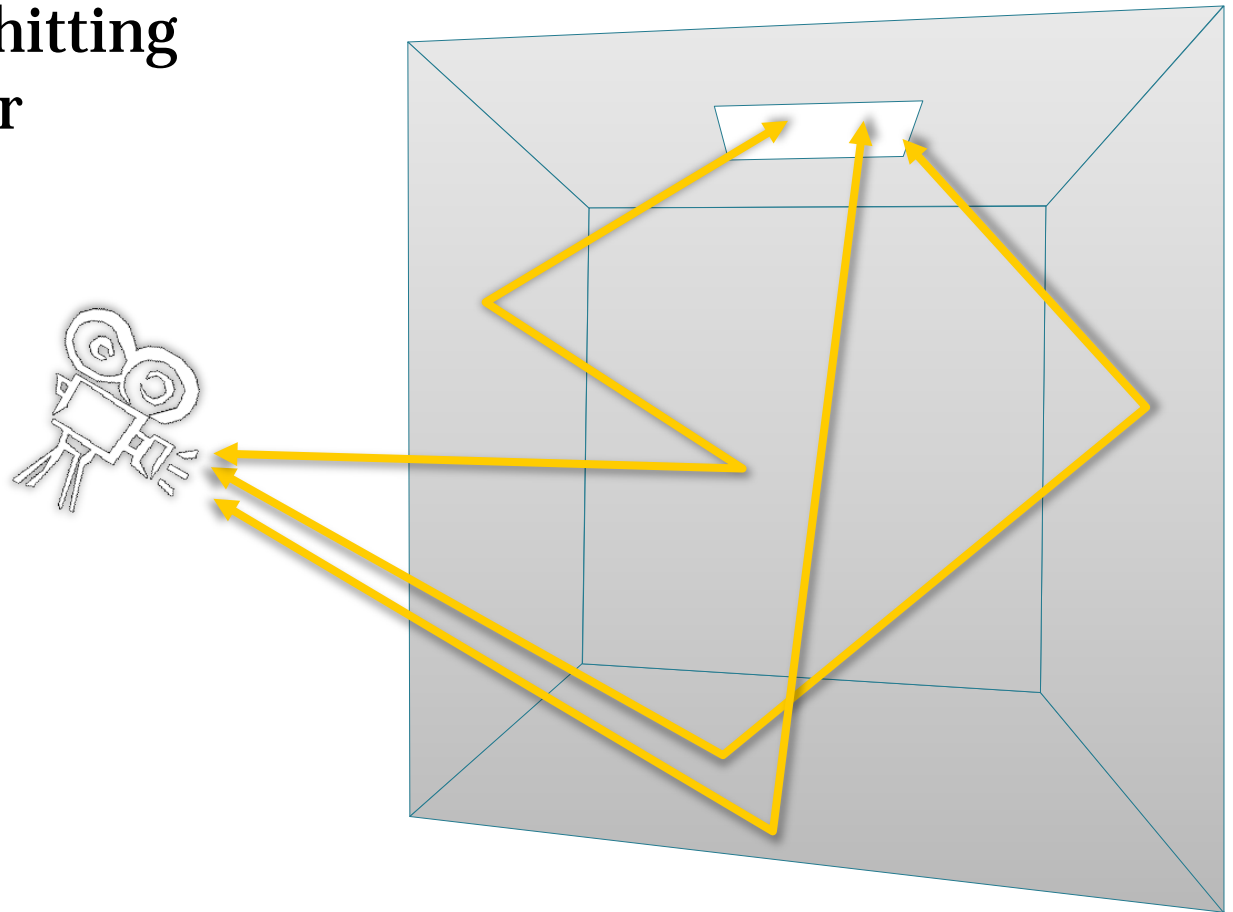


Light transport



Light transport

- **Camera response**
 - all paths hitting the sensor



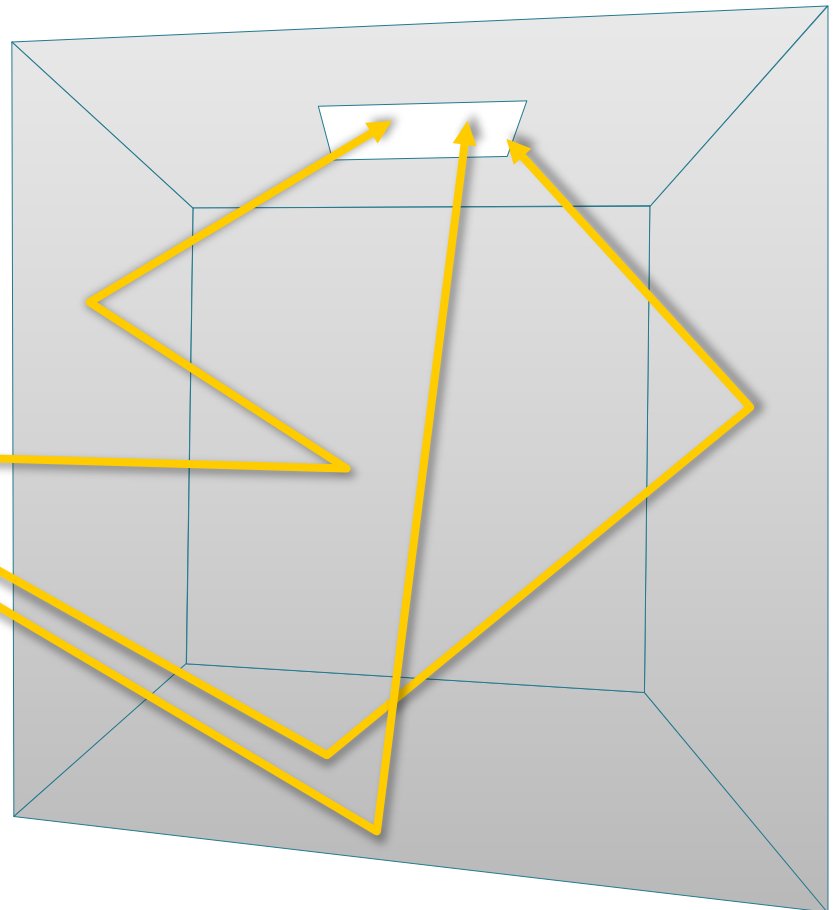
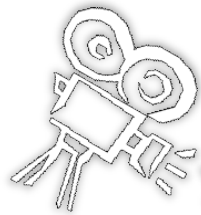
Path integral formulation

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

camera resp.
 j -th pixel value)

all paths

measurement
contribution
function



[Veach and Guibas 1995]

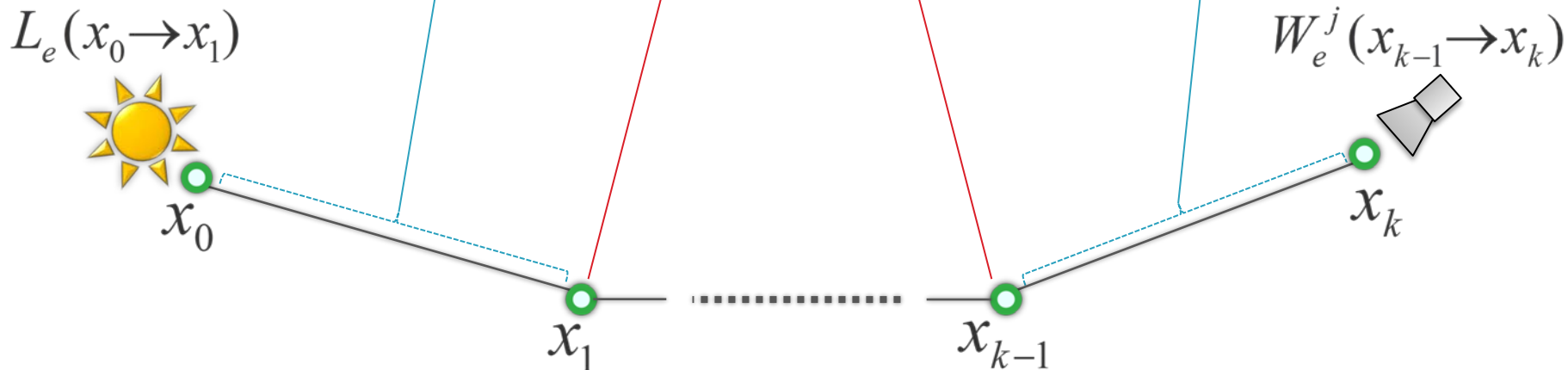
[Veach 1997]

Measurement contribution function

$$\bar{x} = x_0 x_1 \dots x_k$$

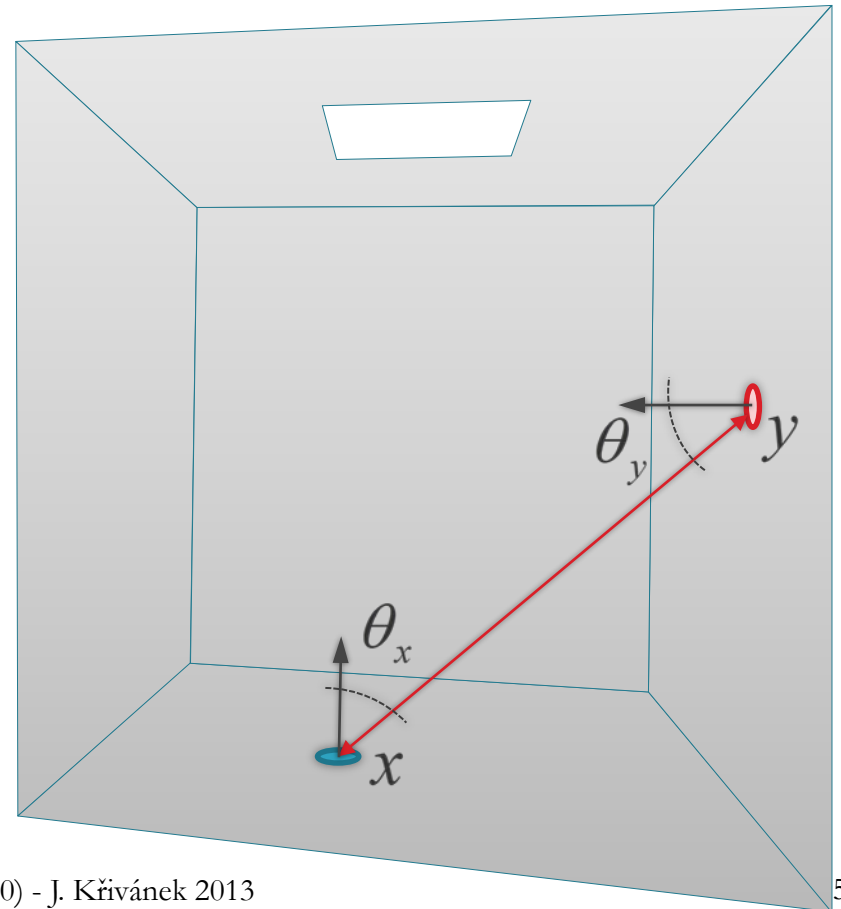
$$f_j(\bar{x}) = \underbrace{L_e(x_0 \rightarrow x_1)}_{\substack{\text{emitted} \\ \text{radiance}}} \underbrace{T(\bar{x})}_{\substack{\text{path} \\ \text{throughput}}} \underbrace{W_e^j(x_{k-1} \rightarrow x_k)}_{\substack{\text{sensor sensitivity} \\ \text{("emitted importance")}}}$$

$$T(\bar{x}) = G(x_0 \leftrightarrow x_1) \rho_s(x_1) \dots \rho_s(x_{k-1}) G(x_{k-1} \leftrightarrow x_k)$$



Geometry term

$$G(x \leftrightarrow y) = \frac{|\cos \theta_x| |\cos \theta_y|}{\|x - y\|^2} V(x \leftrightarrow y)$$



Path integral formulation

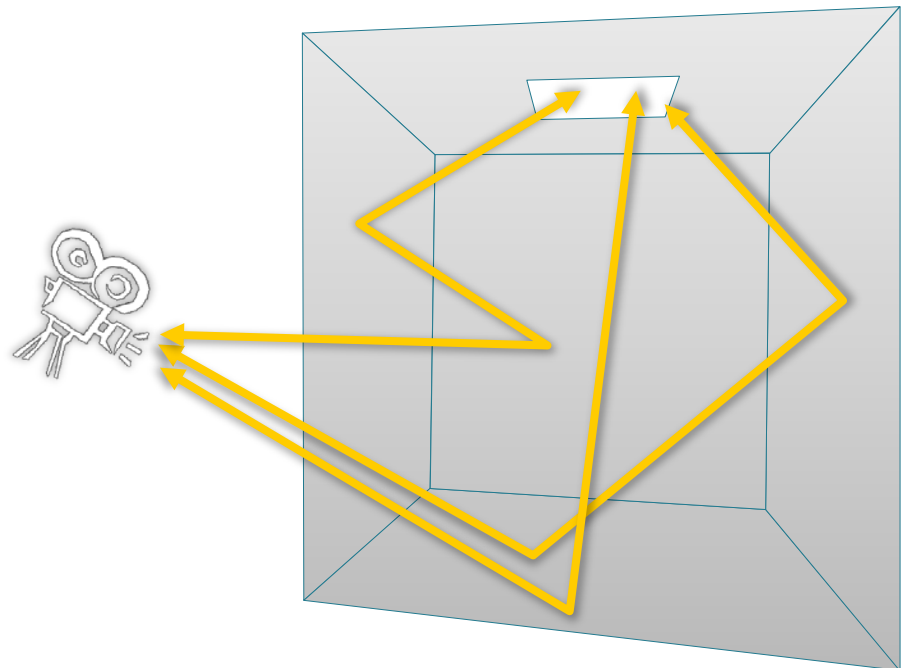
$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

camera resp.
 j -th pixel value)



all paths

measurement
contribution
function

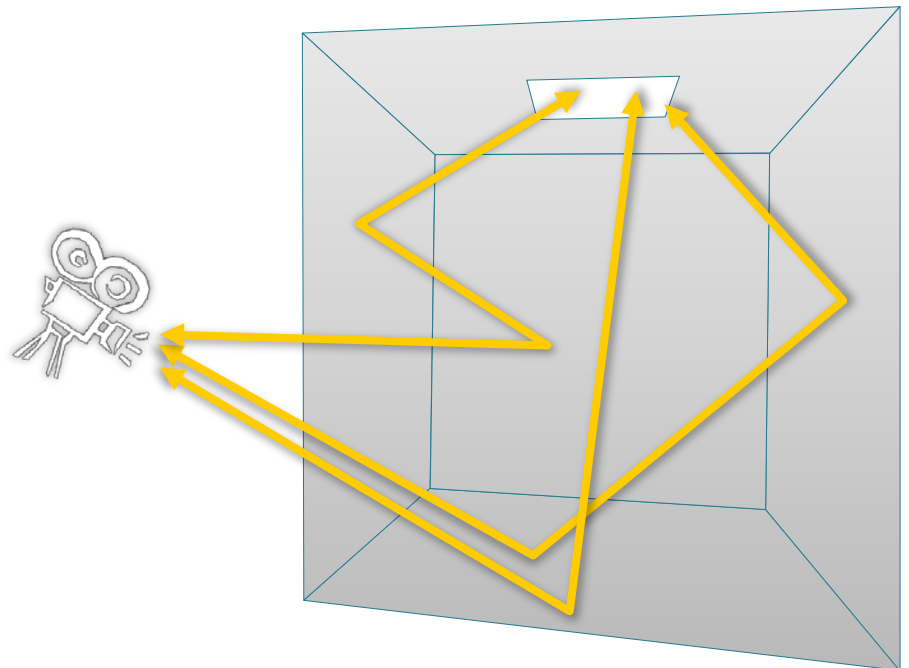


Path integral formulation

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) \, d\mu(\bar{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M^{k+1}} f_j(x_0 \dots x_k) \, dA(x_0) \dots dA(x_k)$$

all path lengths all possible vertex positions



Path integral

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

pixel value

all paths

contribution
function

Rendering :

Evaluating the path integral

Path integral

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

pixel value

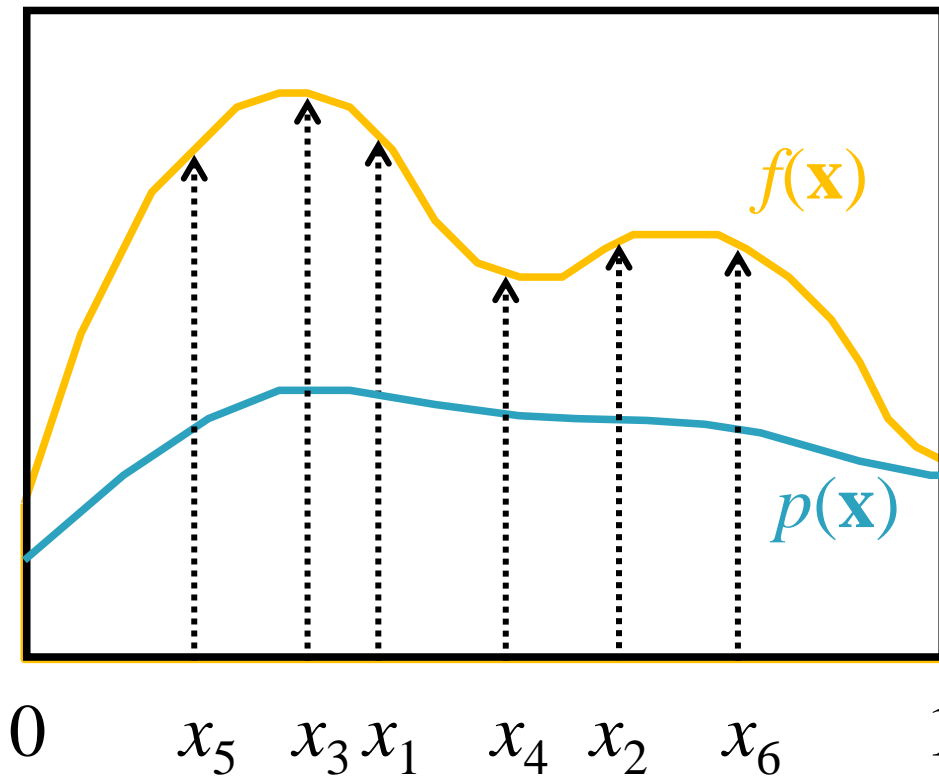
all paths

contribution
function

- **Monte Carlo integration**

Monte Carlo integration

- General approach to numerical evaluation of integrals



Integral:

$$I = \int f(x) dx$$

Monte Carlo estimate of I :

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}; \quad x_i \propto p(x)$$

Correct „on average“:

$$E[\langle I \rangle] = I$$

MC evaluation of the path integral

Path integral

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) \, d\mu(\bar{x})$$

MC estimator

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$

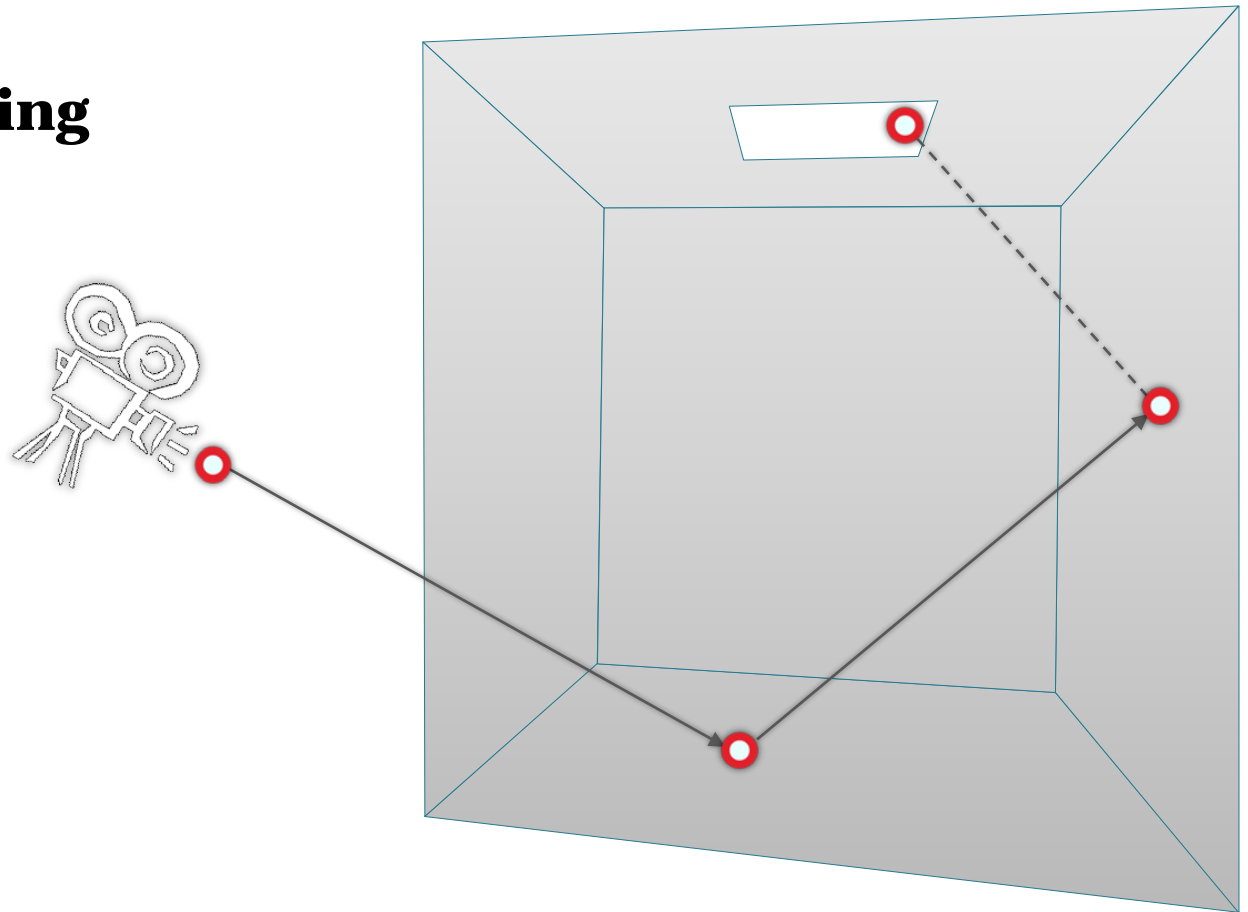
- Sample path \bar{x} from some distribution with PDF $p(\bar{x})$?
- Evaluate the probability density $p(\bar{x})$?
- Evaluate the integrand $f_j(\bar{x})$ ✓

Path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques

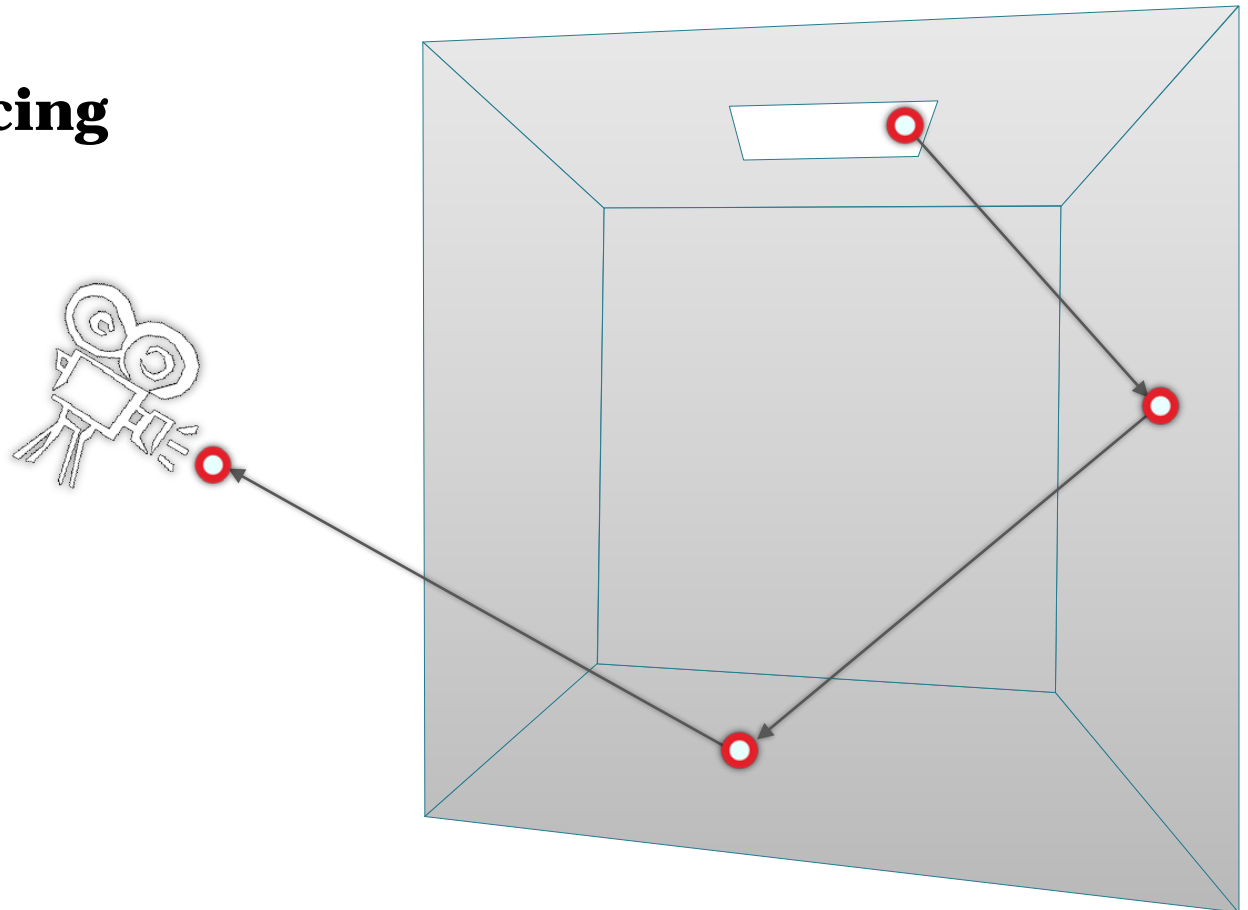
Path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques
 - **Path tracing**



Path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques
 - **Light tracing**



Path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques
- **Same** general form of **estimator**

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$

- **No importance transport, no adjoint equations!!!**

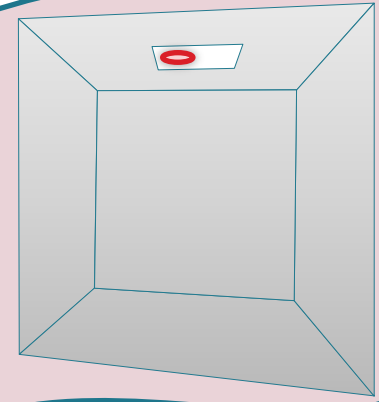
Path sampling & Path PDF

Local path sampling

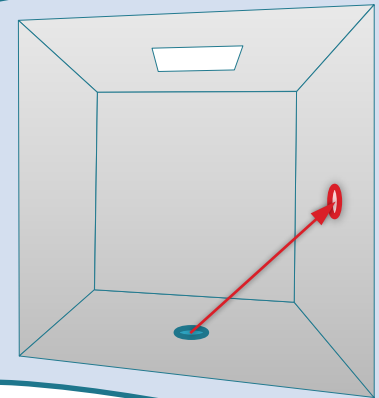
- Sample one path vertex at a time

1. From an a priori distribution

- lights, camera sensors

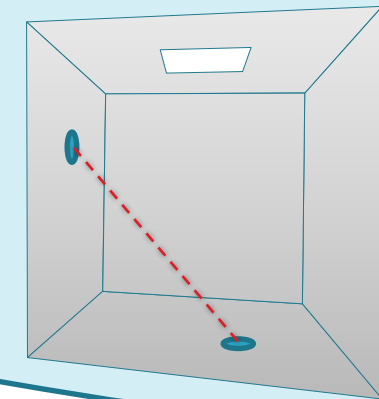


2. Sample direction from an existing vertex

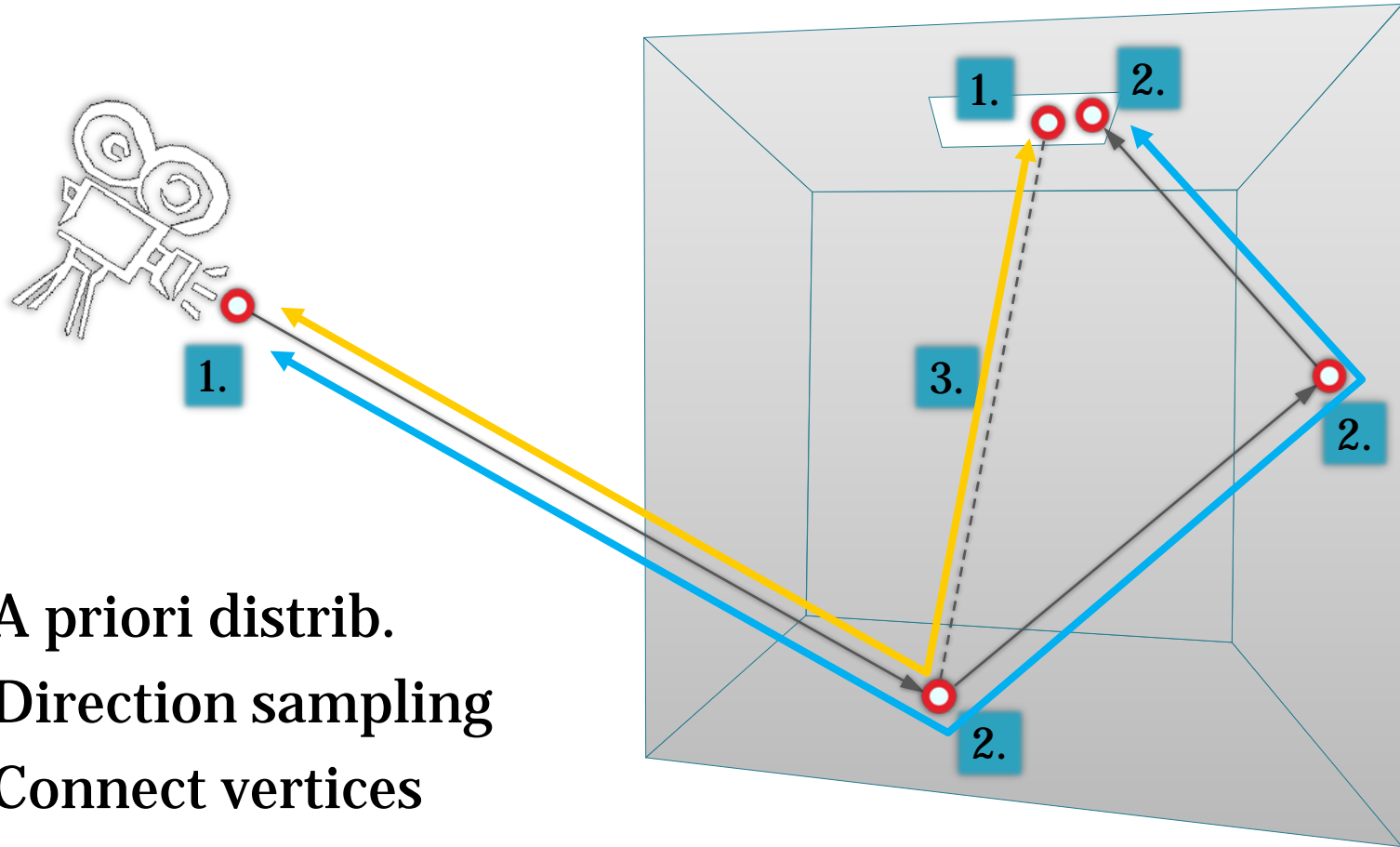


3. Connect sub-paths

- test visibility between vertices



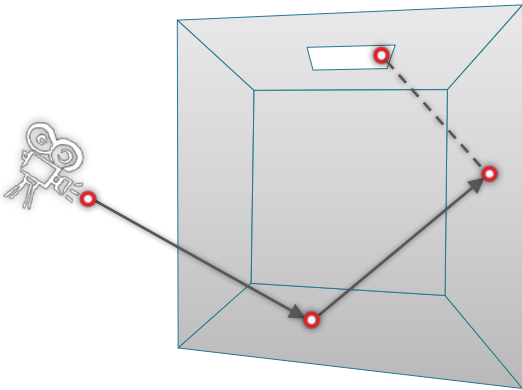
Example – Path tracing



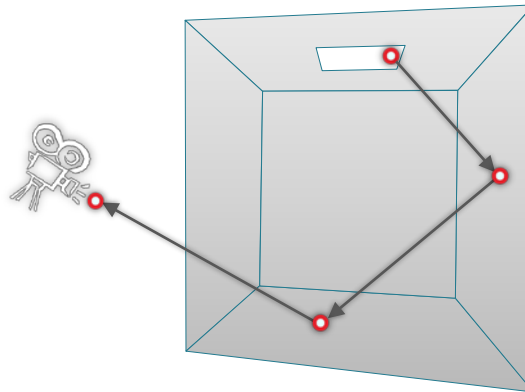
1. A priori distrib.
2. Direction sampling
3. Connect vertices

Use of local path sampling

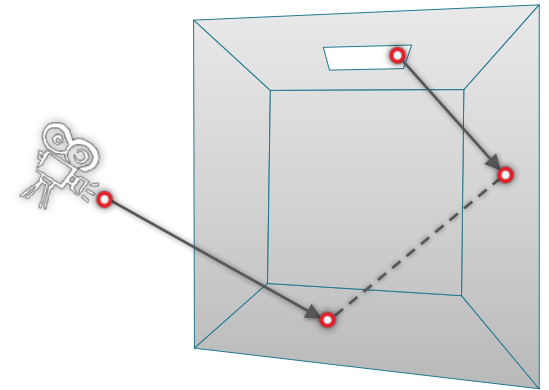
Path tracing



Light tracing



Bidirectional path tracing

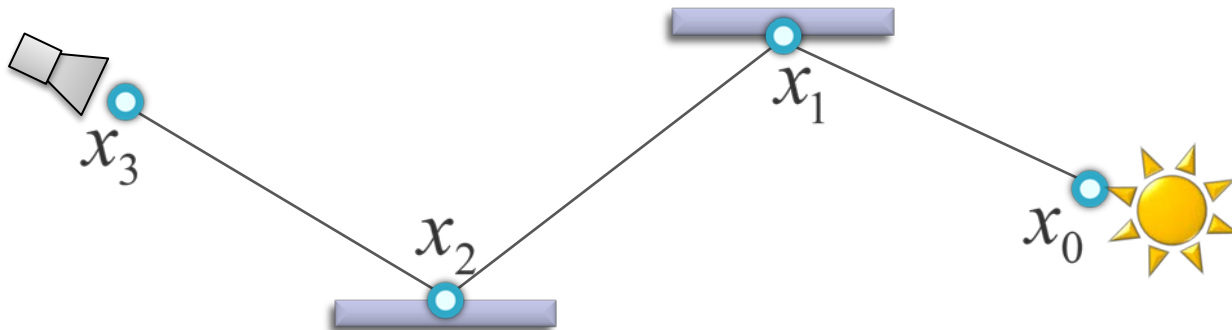


Probability density function (PDF)

path PDF

$$\underline{p(\bar{x})} = \underline{p(x_0, \dots, x_k)}$$

joint PDF of path vertices

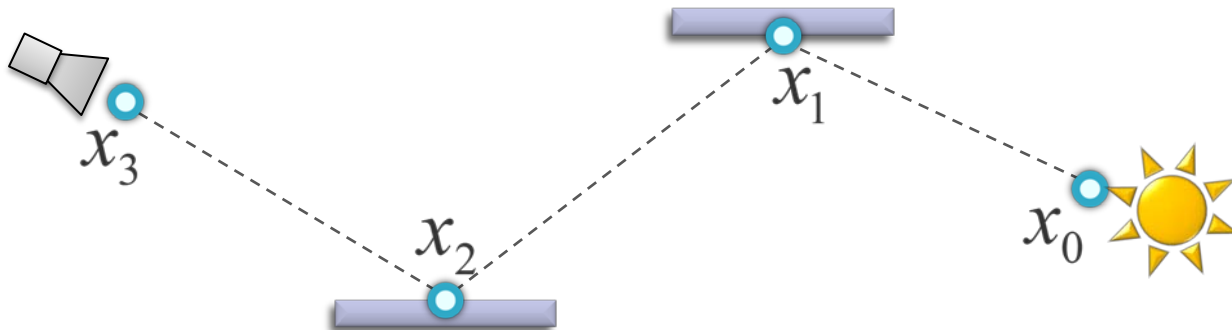


Probability density function (PDF)

path PDF

$$\underline{p(\bar{x})} = \underline{p(x_0, \dots, x_k)}$$

joint PDF of path vertices



Probability density function (PDF)

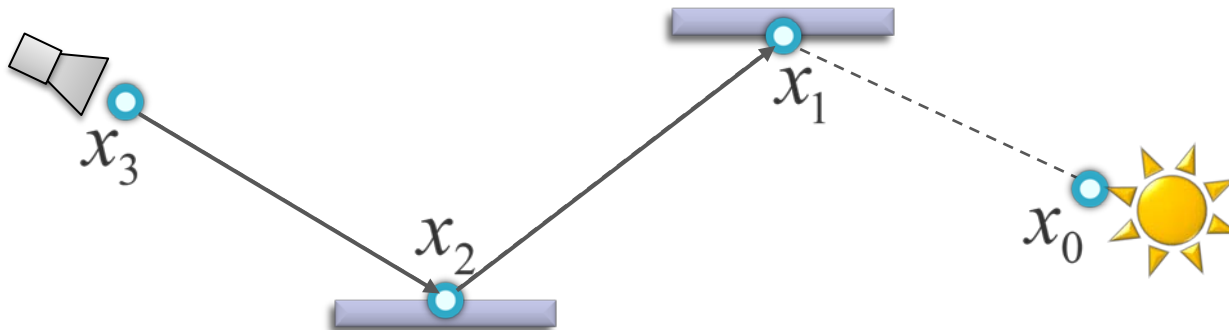
path PDF

$$\underline{p(\bar{x})} = \underline{p(x_0, \dots, x_k)} = p(x_3) \begin{matrix} p(x_2 | x_3) \\ p(x_1 | x_2) \\ p(x_0) \end{matrix}$$

joint PDF of path vertices

product of (conditional) vertex PDFs

Path tracing example:



Probability density function (PDF)

path PDF

$$\underline{p(\bar{x})} = \underline{p(x_0, \dots, x_k)} = p(x_3)$$

joint PDF of path vertices

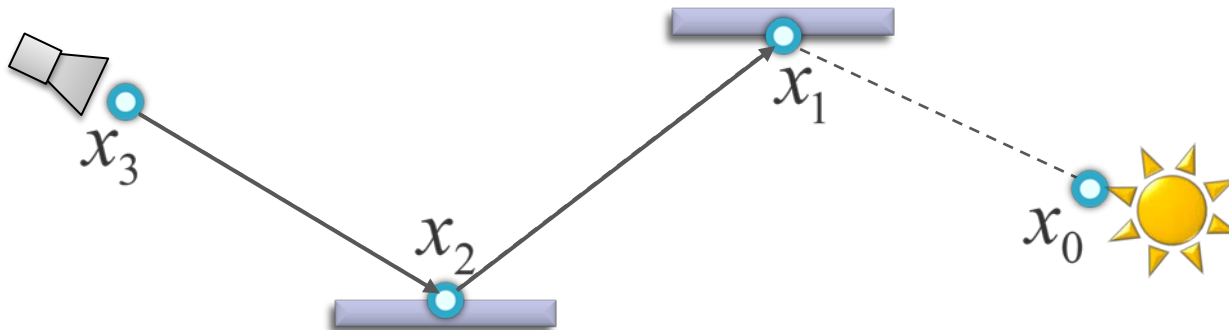
$$p(x_2)$$

$$p(x_1)$$

$$p(x_0)$$

product
of (conditional)
vertex PDFs

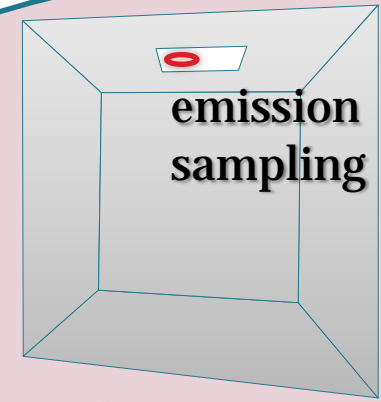
Path tracing example:



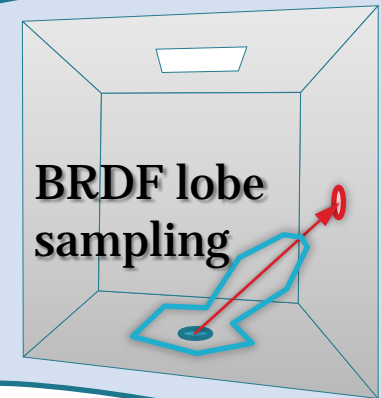
Vertex sampling

■ Importance sampling principle

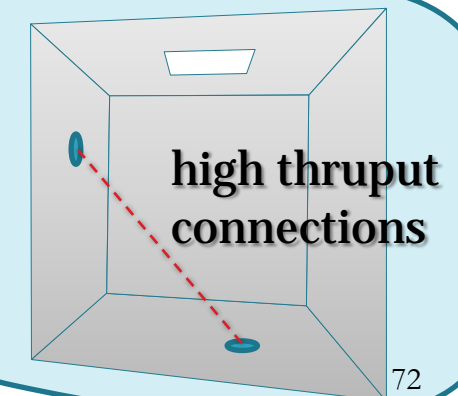
1. Sample from an a priori distrib.



2. Sample direction from an existing vertex

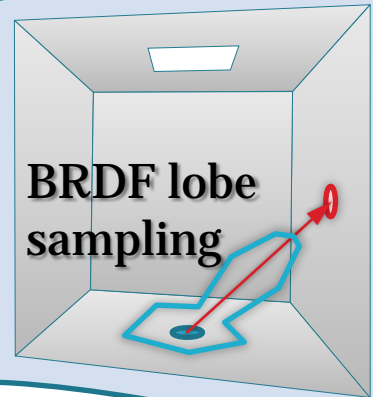


3. Connect sub-paths



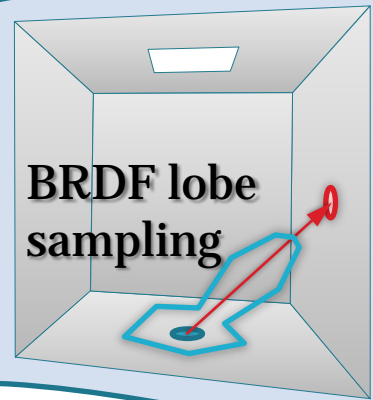
Vertex sampling

- Sample direction from an existing vertex



Measure conversion

- Sample direction from an existing vertex



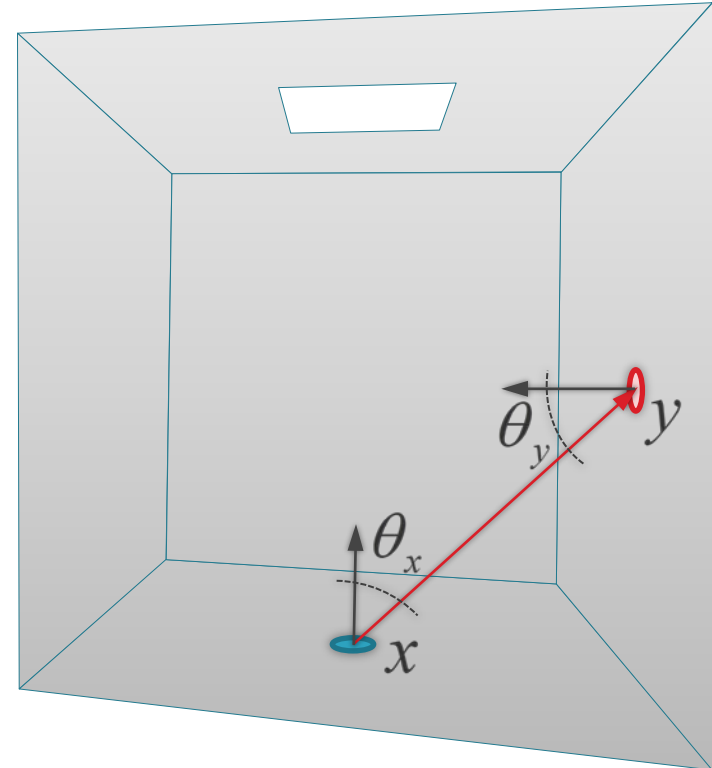
$$\frac{p(y)}{\text{w.r.t. area}} = \frac{p^\perp(x \rightarrow y)}{\text{w.r.t. proj. solid angle}} G(x \leftrightarrow y)$$

w.r.t. area

w.r.t. proj.
solid angle

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$

$$= \frac{\dots \rho_s(x \rightarrow y) G(x \leftrightarrow y) \dots}{\dots p^\perp(x \rightarrow y) G(x \leftrightarrow y) \dots}$$



Summary

Path integral

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

pixel value

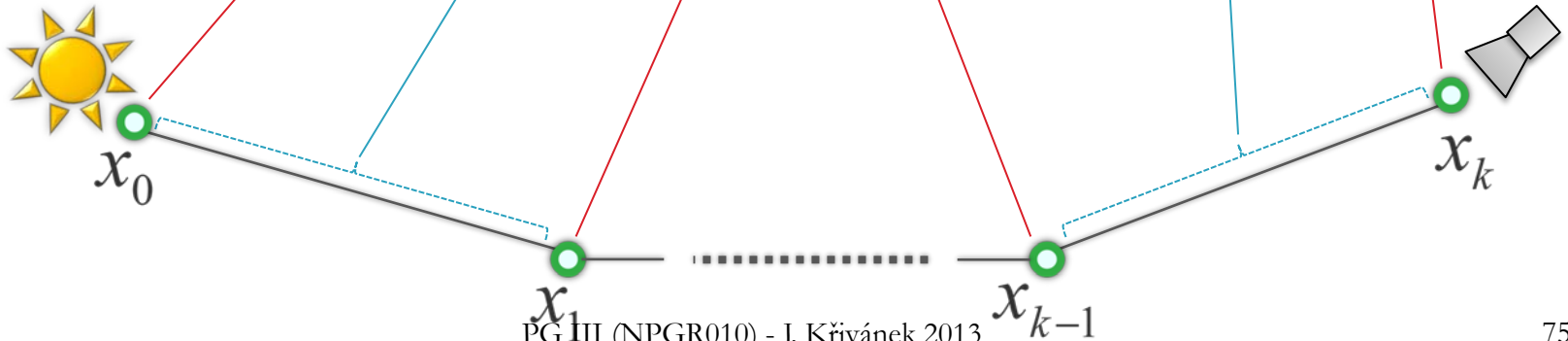
all paths

contribution function

$$\bar{x} = x_0 \dots x_k$$

$$p(\bar{x}) = p(x_0) \dots p(x_k)$$

$$f_j(\bar{x}) = L_e \underbrace{G(x_0 \leftrightarrow x_1)} \rho_s(x_1) \dots \rho_s(x_{k-1}) \underbrace{G(x_{k-1} \leftrightarrow x_k)} W_e^j$$



MC estimator

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$

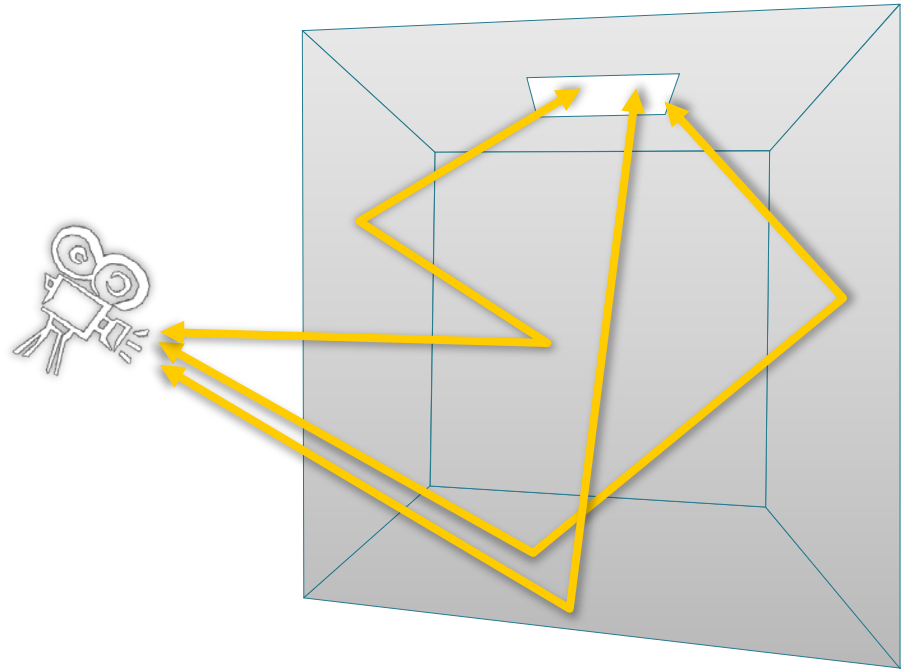
path pdf

sampled path

Summary

■ Algorithms

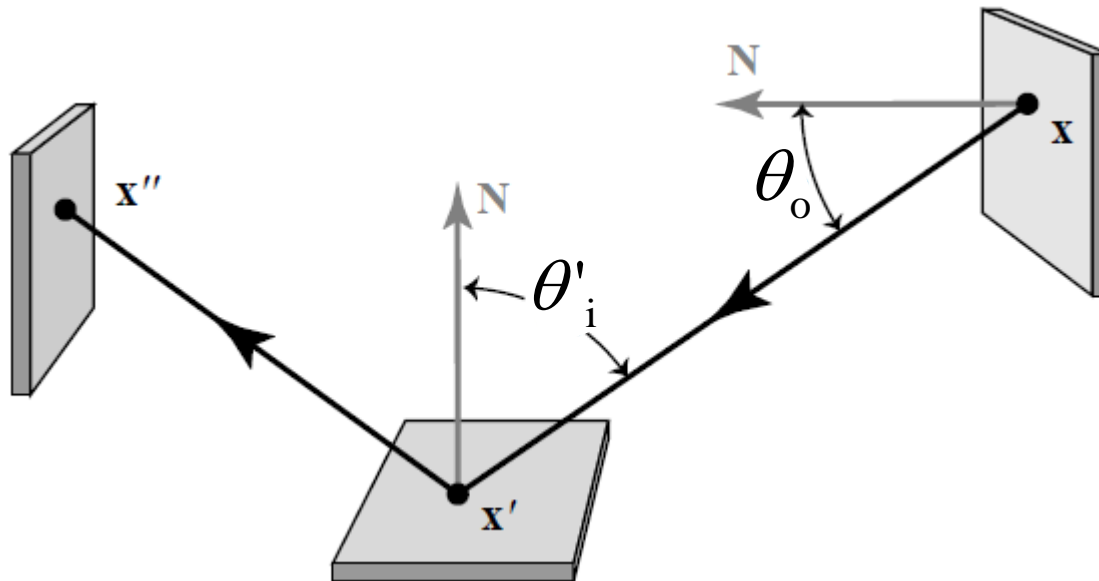
- ❑ different path sampling techniques
- ❑ different path PDF



Odvození integrálu přes prostor cest ze zobrazovací a měřicí rovnice

Třibodová formulace přenosu světla

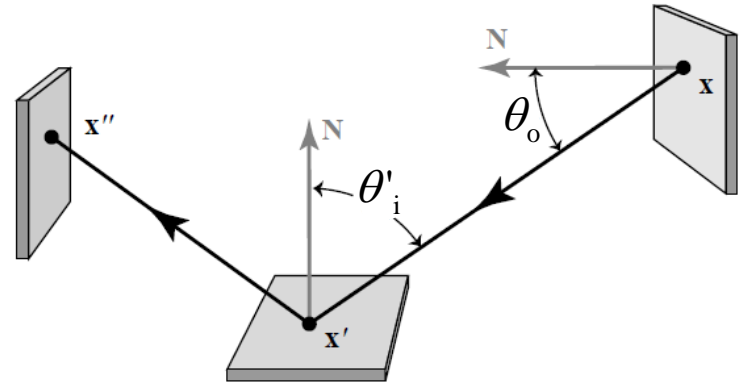
- Eliminace směrů (pouze body na ploše)



$$L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \equiv L(\mathbf{x}, \omega)$$

$$f_r(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') \equiv f_r(\mathbf{x}', \omega_i \rightarrow \omega_o)$$

Zobrazovací rovnice v 3b formulaci



$$L(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') = L_e(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') + \int_M L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot f_r(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA_x$$

$$G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') = V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \frac{|\cos \theta_o \cos \theta'_i|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}$$

Měřicí rovnice v 3b formulaci

$$I_j = \int_{M \times M} W_e^{(j)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA_{\mathbf{x}} dA_{\mathbf{x}'}$$

Důležitost emitovaná z \mathbf{x}' do \mathbf{x}
(Značení: šipka = směr šíření světla, nikoli důležitosti)

\mathbf{x}' ... na senzoru

\mathbf{x} ... na ploše scény

Odvození integrálu přes prostor cest

- Do měřicí rovnice v 3b formulaci se dosadí Neumannova expanze ZR v 3b formulaci, vypadne suma integrálů.
- Integrand je funkcí příspěvku (contribution function).

“Path integral” – A historical remark

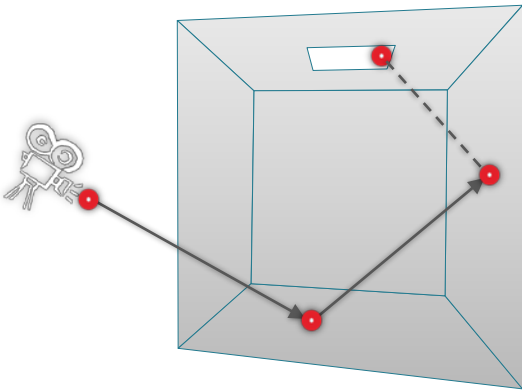
- This course [Veach and Guibas 1995], [Veach 1997]
 - Easily derived from the rendering equation [Veach 1997]
- Feynman path integral formulation of quantum mechanics [Feynman and Hibbs 65]
- Homogeneous materials [Tessendorf 89, 91, 92]
- Rendering [Premože et al. 03, 04]

Obousměrné sledování cest (Bidirectional path tracing)

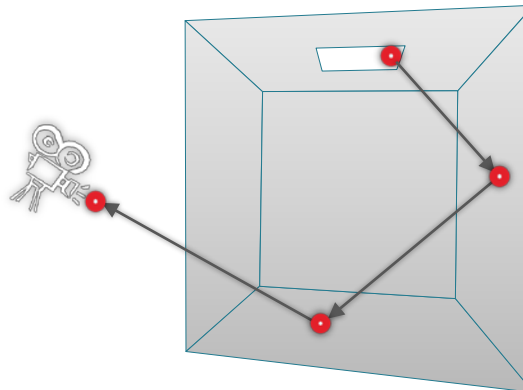
Bidirectional path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques

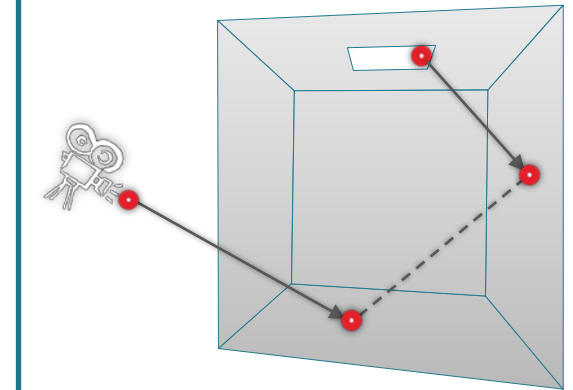
Path tracing



Light tracing

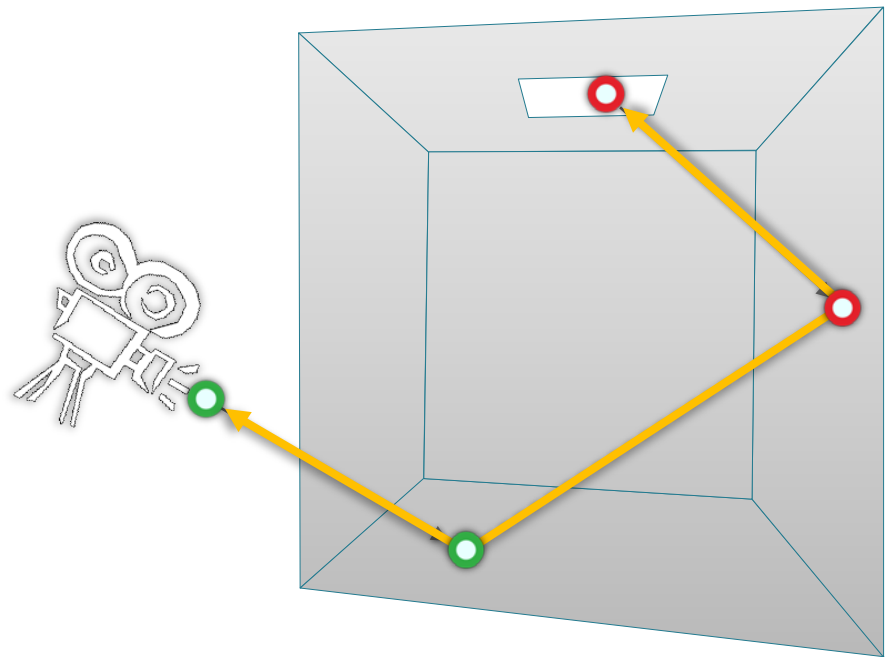


Bidirectional path tracing



One bidirectional path sampling technique

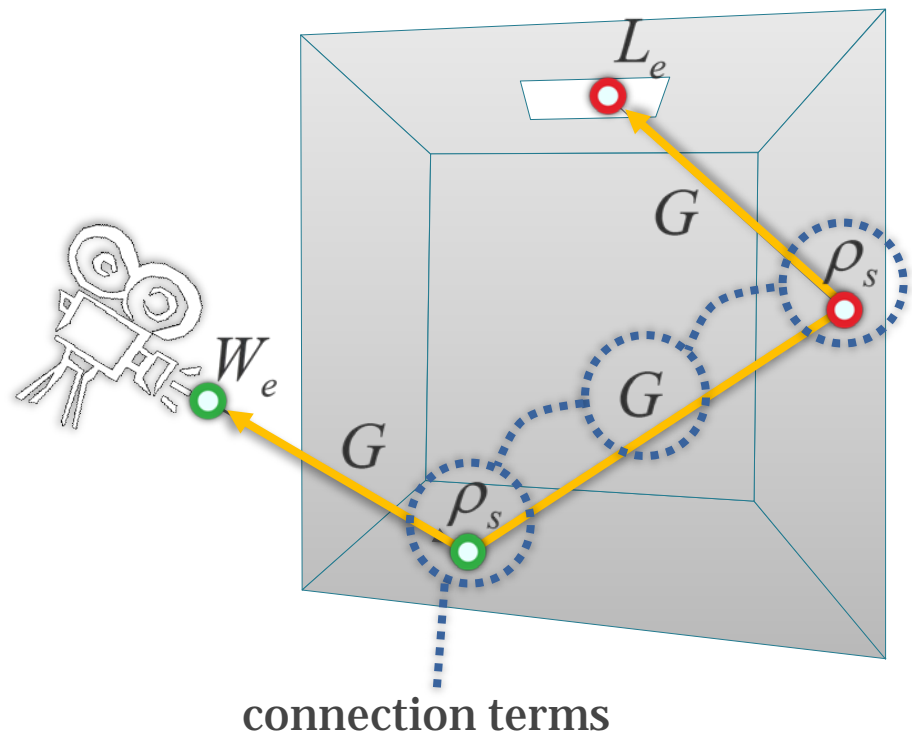
- sample light sub-path
- sample camera sub-path
- sub-path connection



One bidirectional path sampling technique

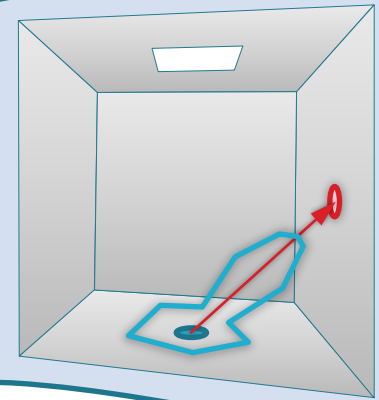
- The usual path integral **estimator**

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$



Digression

- Sample direction from an existing vertex

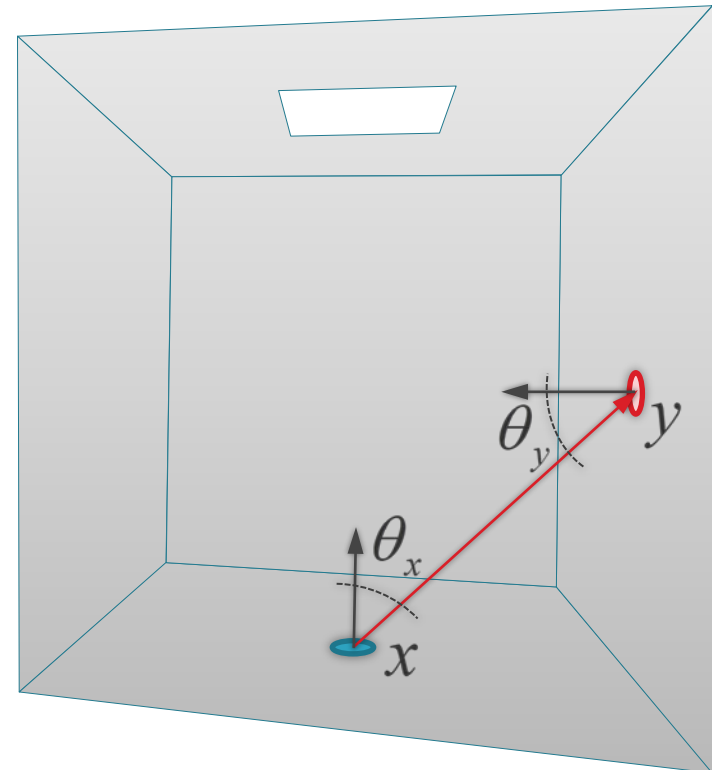


$$\frac{p(y)}{\text{w.r.t. area}} = \frac{p^\perp(x \rightarrow y)}{\text{w.r.t. proj. solid angle}} G(x \leftrightarrow y)$$

w.r.t. area

w.r.t. proj.
solid angle

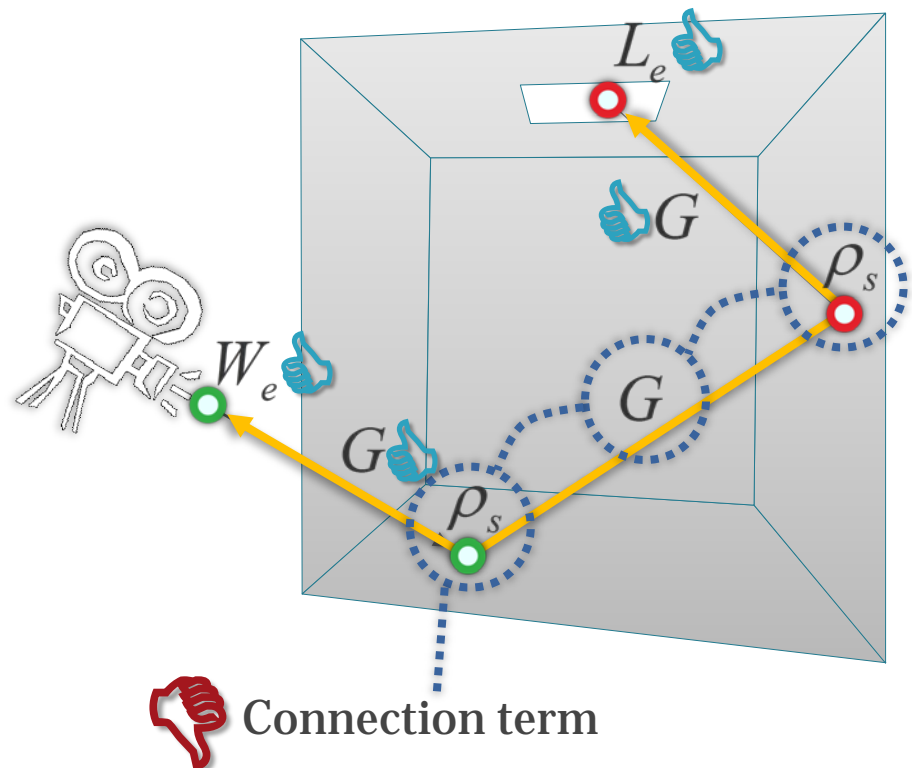
$$\langle I_j \rangle = \frac{\dots \cancel{\rho_s(x \rightarrow y)} \cancel{G(x \leftrightarrow y)} \dots}{\dots \cancel{p^\perp(x \rightarrow y)} \cancel{G(x \leftrightarrow y)} \dots}$$



One bidirectional path sampling technique

- **The usual estimator**

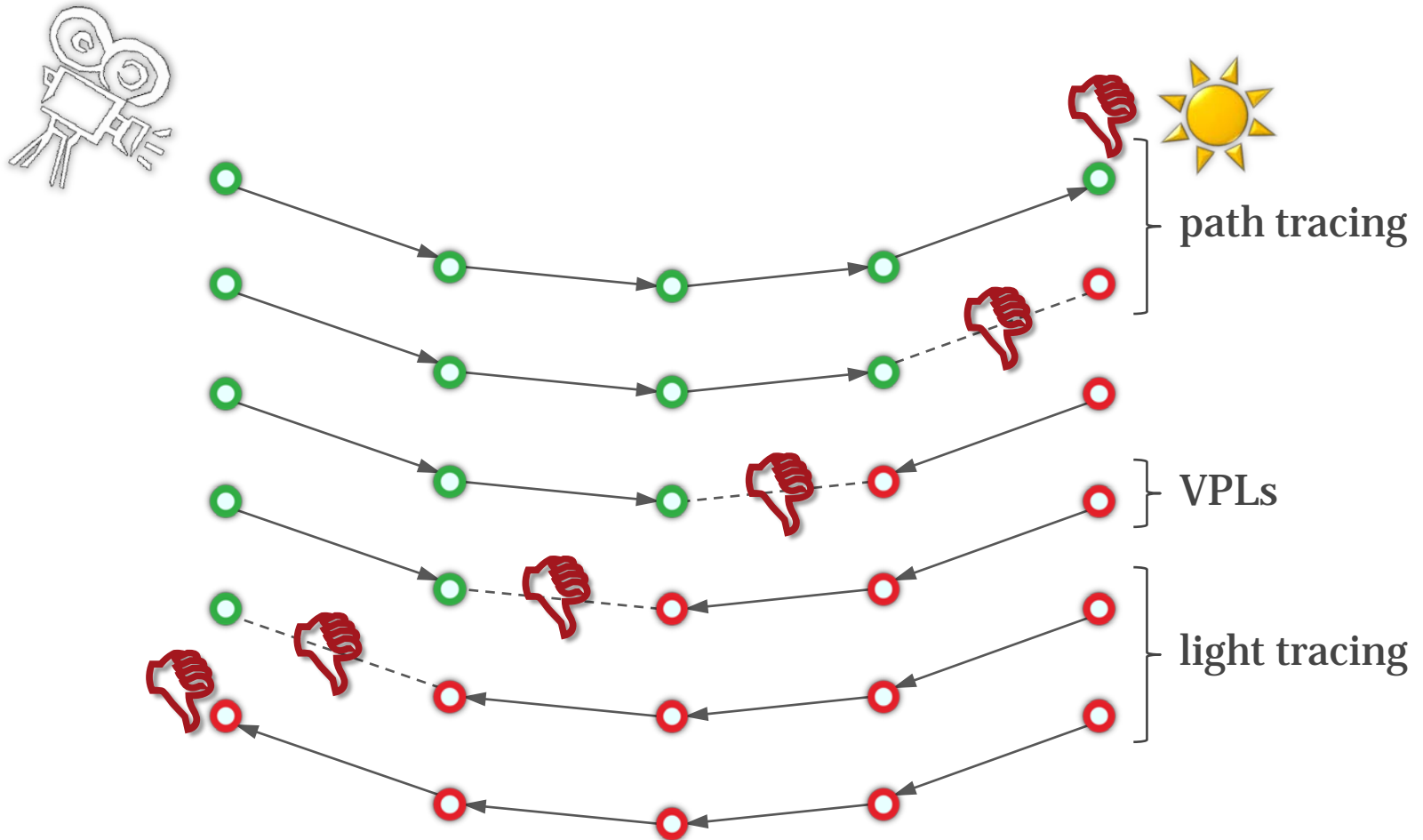
$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$



All possible bidirectional techniques

○ vertex on a **light sub-path**

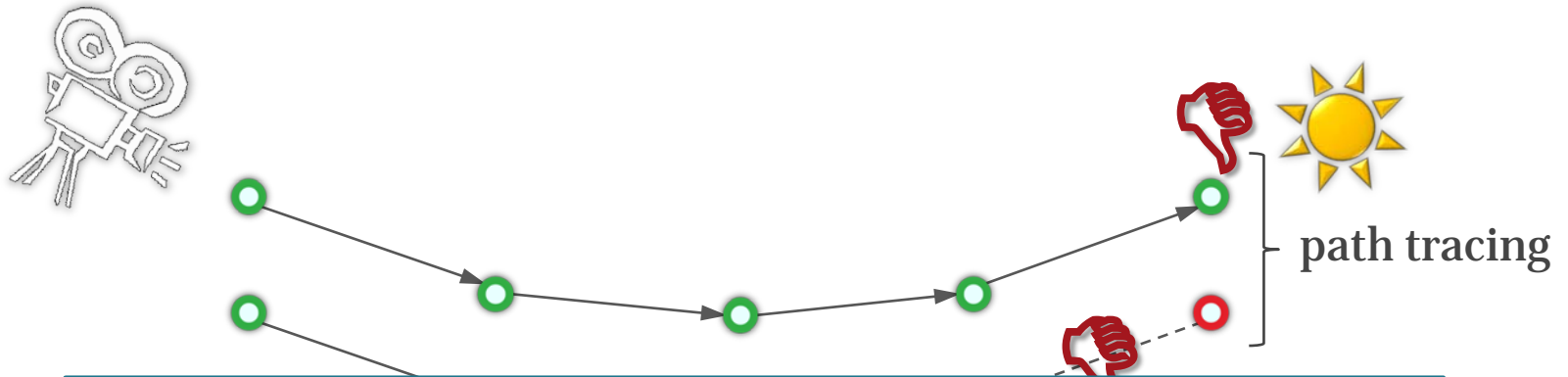
○ vertex on an **eye subpath**



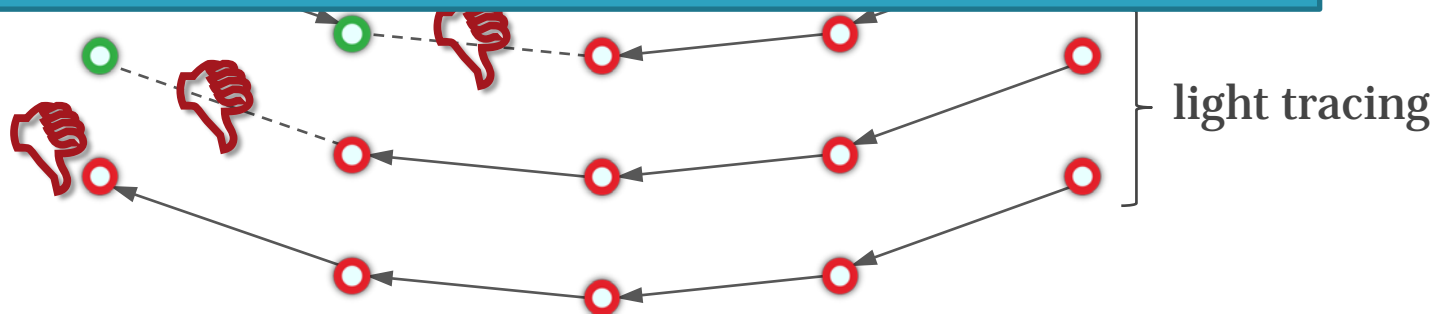
All possible bidirectional techniques

○ vertex on a **light sub-path**

○ vertex on an **eye subpath**



no single technique importance
samples all the terms

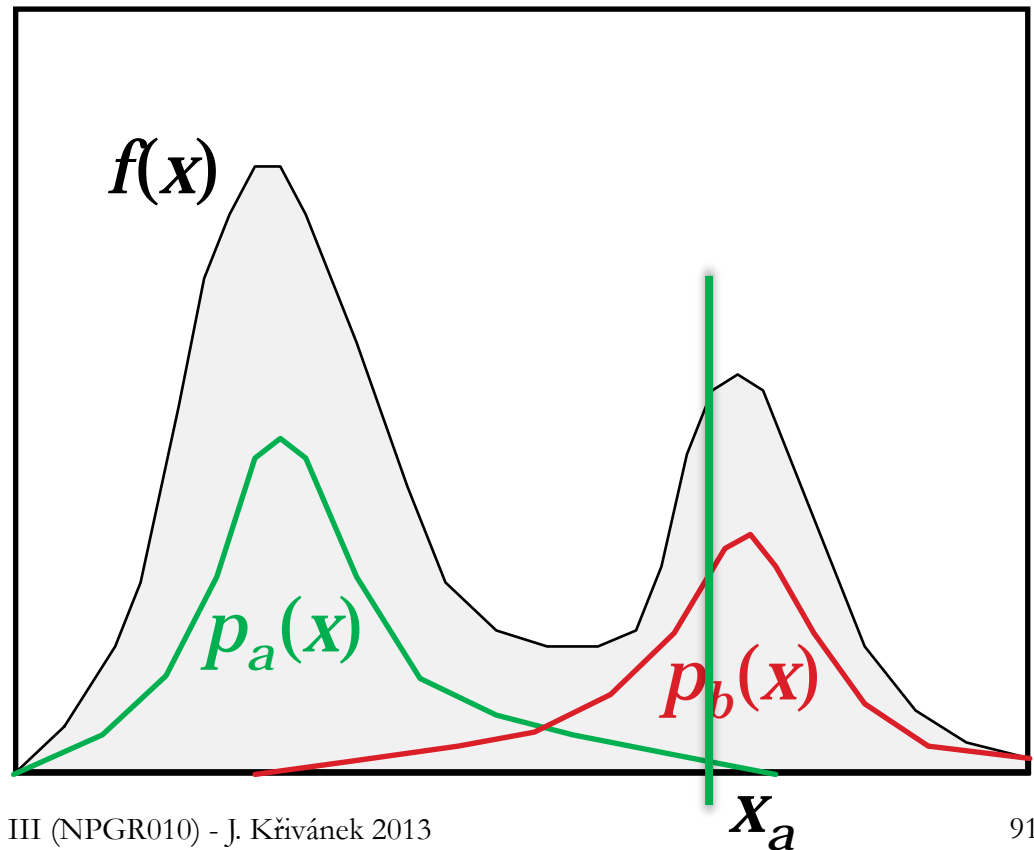


Multiple Importance Sampling (MIS)

[Veach & Guibas, 95]

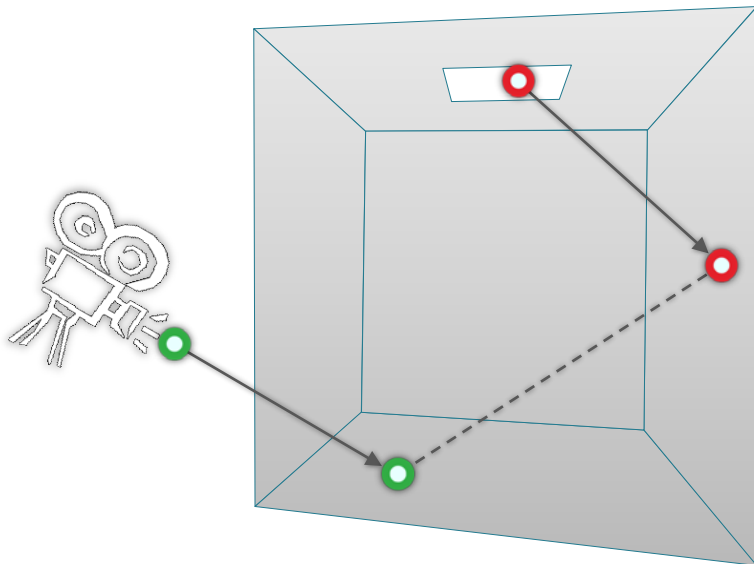
**Combined
estimator:**

$$\langle I \rangle = \frac{f(x)}{[p_a(x) + p_b(x)]/2}$$



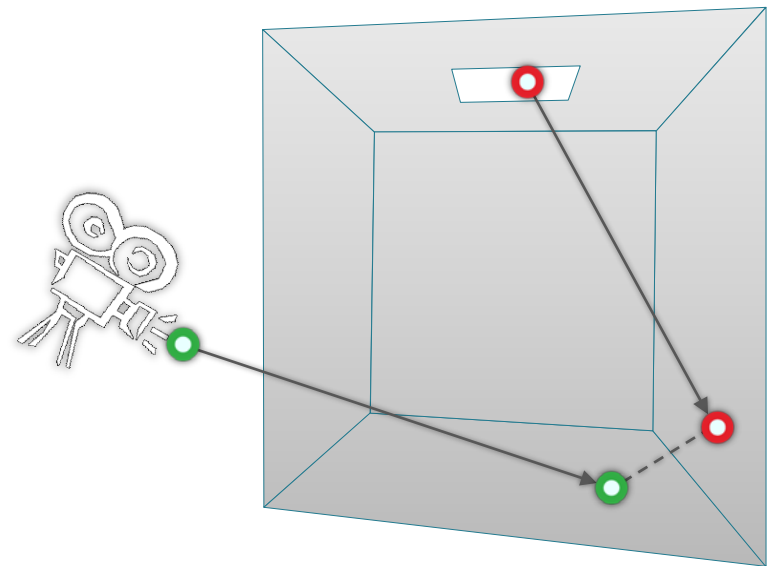
Multiple Importance Sampling (MIS)

High MIS weight



Low MIS weight

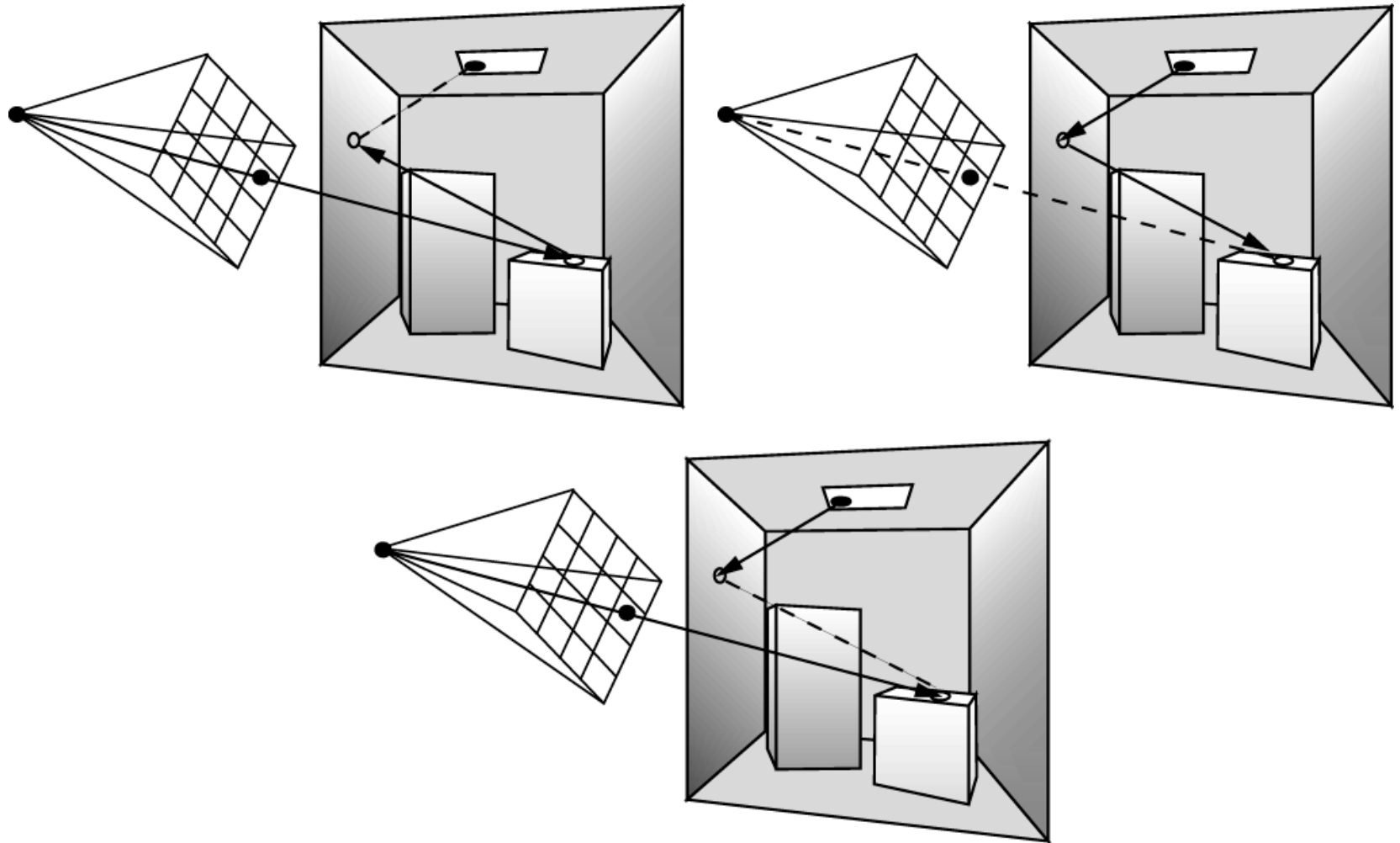
Singularity cancelled



Bidirectional path tracing

- Use **all** of the above sampling techniques
- Combine using **Multiple Importance Sampling**

Vzorkovací strategie



Obousměrné sledování cest

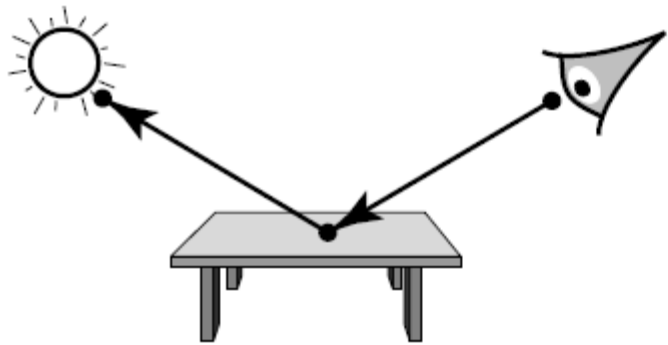
- Zobecnění kombinované strategie pro výpočet přímého osvětlení v path traceru
- Přímé osvětlení
 - Různé strategie nalezení vzorkování bodu na zdroji světla
- BPT
 - Různé strategie generování **celých světelných cest**

Obousměrné sledování cest

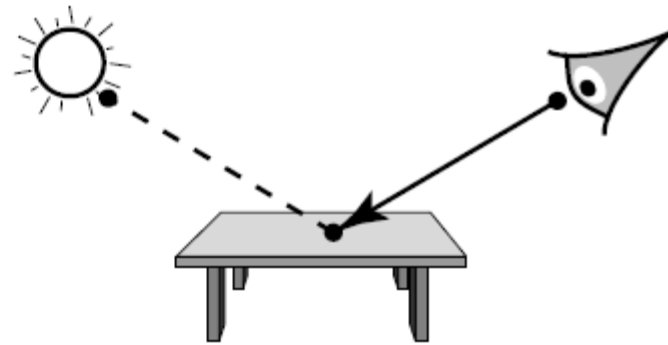
- Pro danou světelnou cestu:
 - Funkce příspěvku $f_j()$ **nezávisí** na způsobu vzorkování
 - Hustota pravděpodobnosti **závisí** na způsobu vzorkování

Vzorkovací techniky v BPT

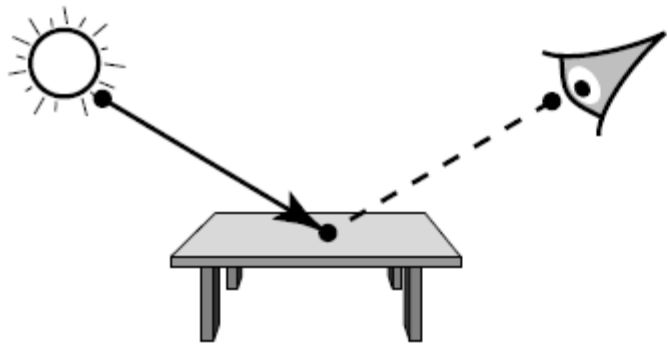
Příklad: Čtyři vzorkovací techniky pro $k = 2$



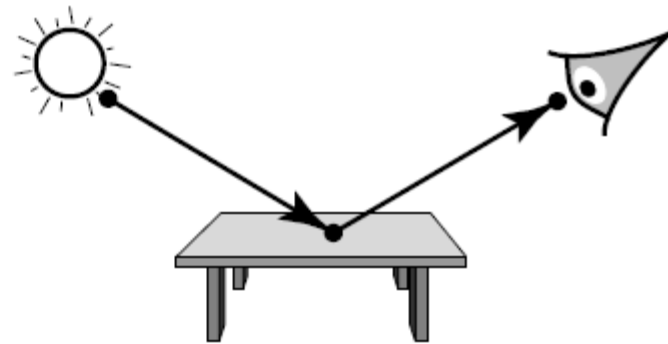
(a) $s = 0, t = 3$



(b) $s = 1, t = 2$



(c) $s = 2, t = 1$



(d) $s = 3, t = 0$

Image: Eric Veach

Vzorkovací techniky v BPT

- Podcesta o t vrcholech vzorkovaná z kamery
- Podcesta o s vrcholech vzorkovaná ze světla
- Spojovací segment délky 1
- Celková délka cesty: $k = s + t - 1$ (segmentů)

- $k+2$ možností pro generování cesty délky k

Vzorkovací techniky v BPT

- Každá technika má **jinou hustotu $p_{s,t}$**
- Každá je účinná při vzorkování jiných světelných efektů
- Všechny techniky odhadují **stejný integrál**

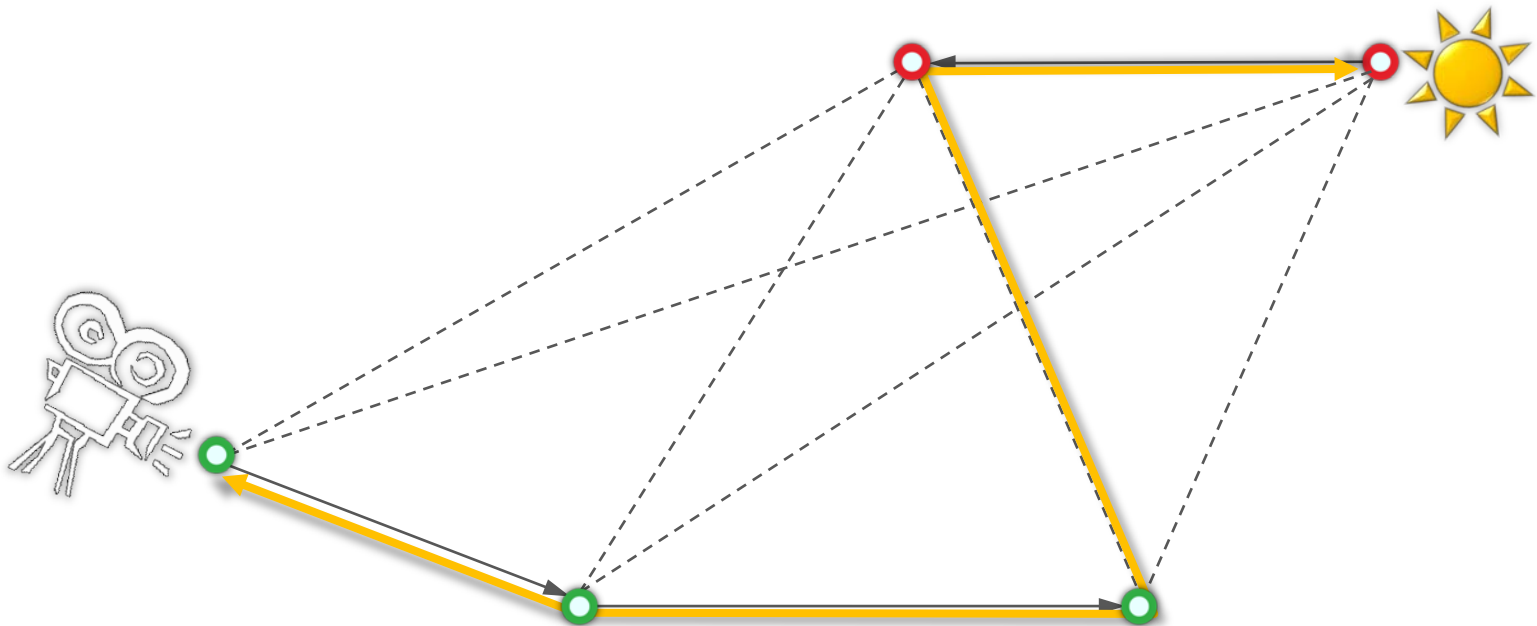
Kombinace vzorkovacích technik

- Kombinovaný estimátor (MIS)

$$F = \sum_{s \geq 0} \sum_{t \geq 0} w_{s,t}(\bar{x}_{s,t}) \frac{f_j(\bar{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})}$$

kombinační strategie
(např. vyvážená heuristika)

BPT Implementation



Implementace: Generování cest po skupinách

- Generuj podcestu náhodné délky **od světla**

$$Y_0 \cdots Y_{n_L-1}$$

- Generuj podcestu náhodné délky **od kamery**

$$Z_{n_E-1} \cdots Z_0$$

- Spoj každý **prefix cesty od světla** s každým **sufixem cesty od kamery**

$$\bar{x}_{s,t} = Y_0 \cdots Y_{s-1} Z_{t-1} \cdots Z_0$$

(cesta = vzorek z hustoty $p_{s,t}$)

Generování cest po skupinách

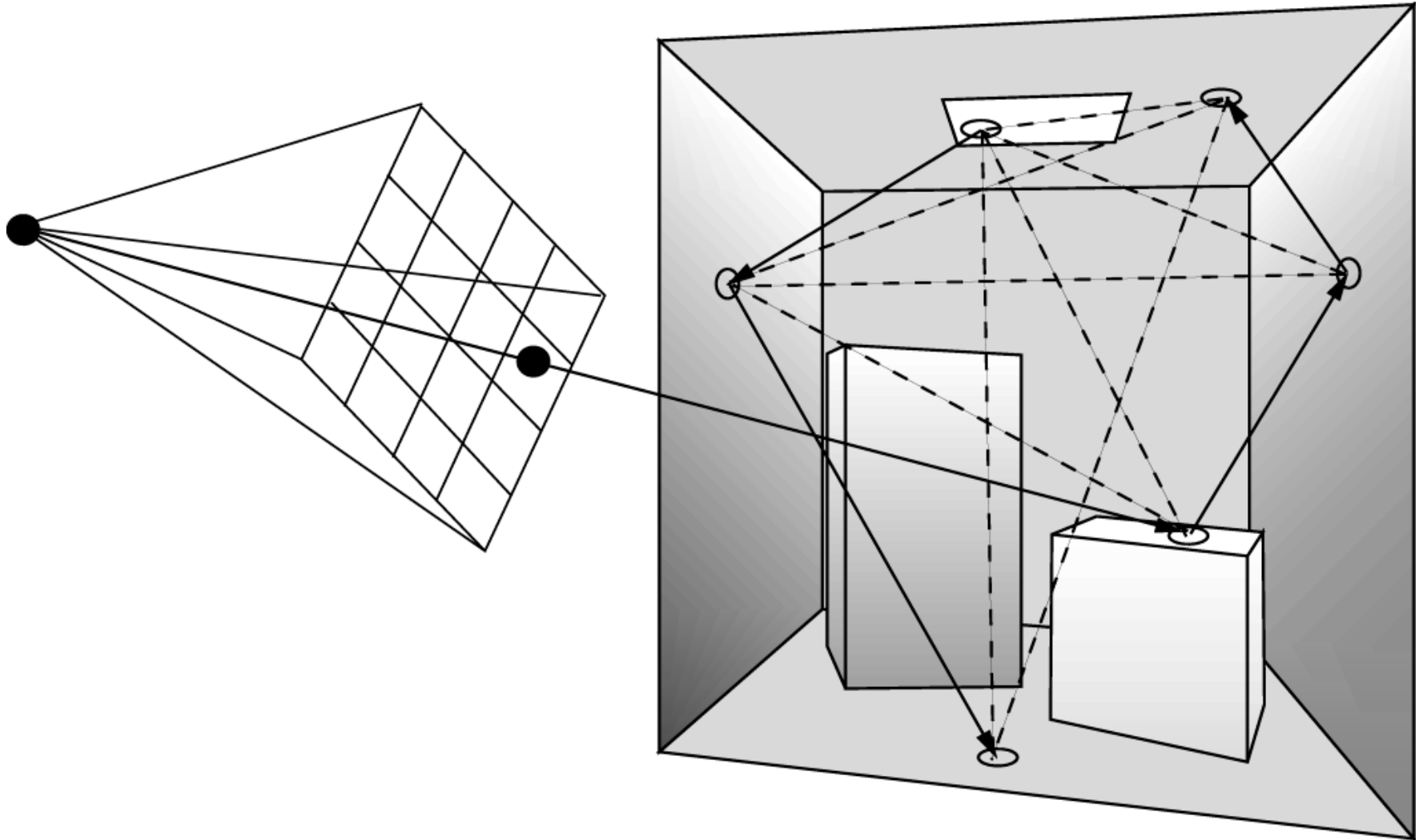


Image: Dutre et al. Advanced Global Illumination

Results



BPT, 25 samples per pixel



PT, 56 samples per pixel

Images: Eric Veach



$k = 2$
(2x)



$k = 3$
(4x)



$k = 4$
(8x)



$k = 5$
(16x)

$s = 1$

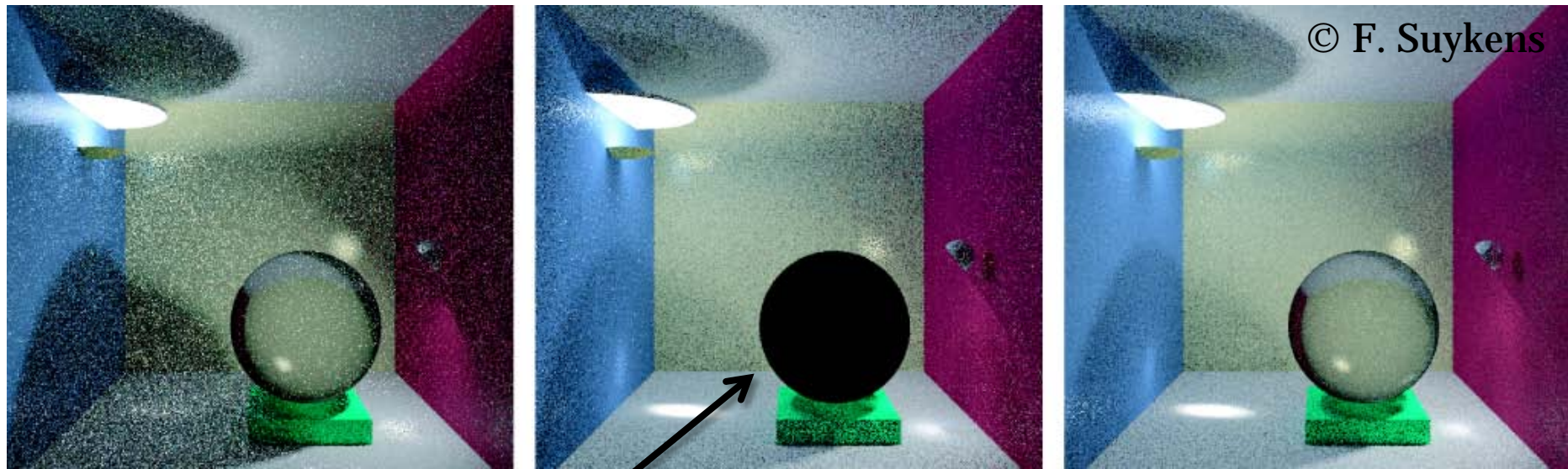
$s = 2 \dots$

$t = 2$

$t = 1$

$s / t =$ počet vrcholů na podcestě od světla / kamery

Porovnání algoritmů



Path tracing

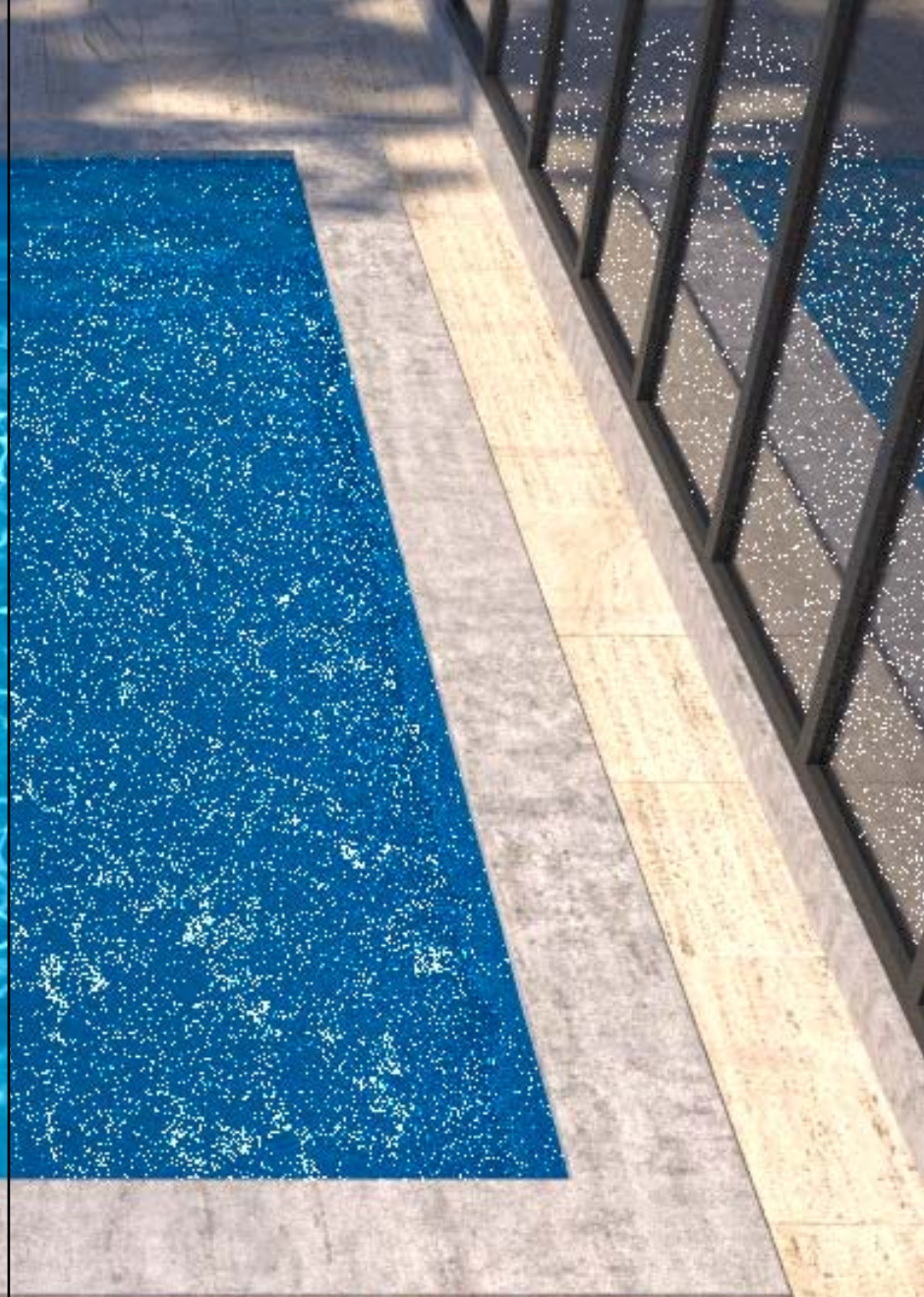
Light tracing

Bidirectional path tracing

Kvíz: Proč je skleněná koule černá?

LIMITATIONS OF LOCAL PATH SAMPLING



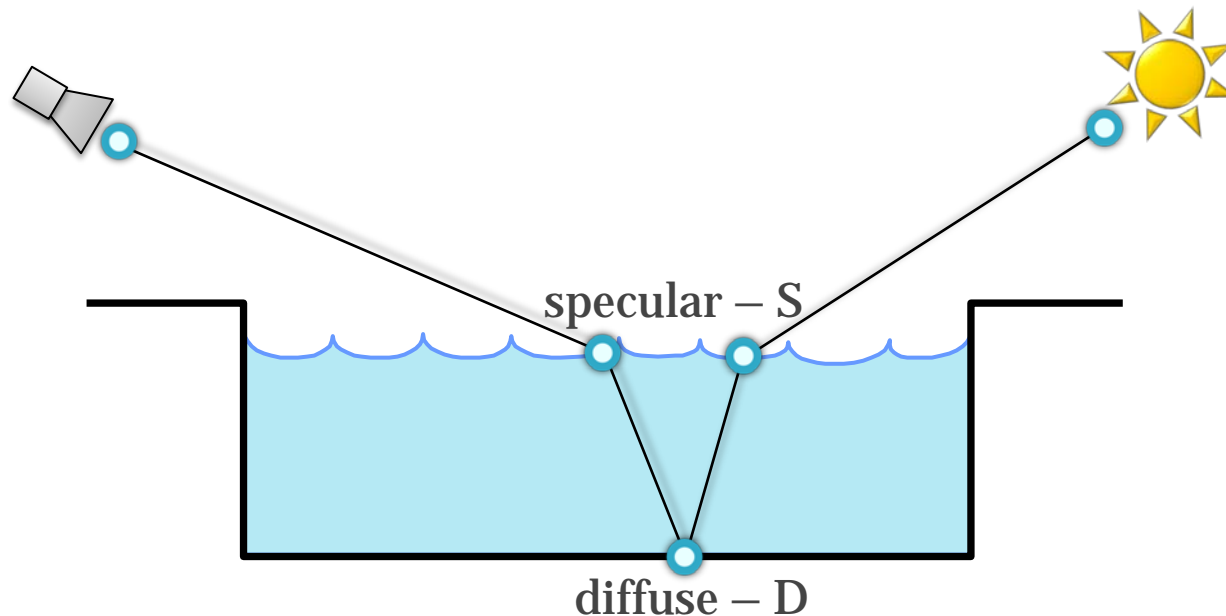


Reference solution

Bidirectional path tracing

Insufficient path sampling techniques

- Some paths sampled with zero (or very small) probability



Alternatives to local path sampling

- **Global path sampling – Metropolis light transport**
 - Initial proposal still relies on local sampling
- Leave path integral framework
 - Density estimation – **photon mapping**
- **Unify path integral framework and density estimation**
 - **Vertex Connection & Merging**

NEARLY THERE...



“Path integral” – A historical remark

- This course [Veach and Guibas 1995], [Veach 1997]
 - Easily derived from the rendering equation [Veach 1997]
- Feynman path integral formulation of quantum mechanics [Feynman and Hibbs 65]
- Homogeneous materials [Tessendorf 89, 91, 92]
- Rendering [Premože et al. 03, 04]

E. Veach: *Robust Monte Carlo methods for light transport simulation*, PhD thesis, Stanford University, 1997, pp. 219-230, 297-317

http://www.graphics.stanford.edu/papers/veach_thesis/